

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

Προσομοίωση Μεγάλης Κλίμακας
Κυκλωμάτων με Τεχνικές
Κατακερματισμού και Προρύθμισης
Γραφών

ΤΟΥ

Ευάγγελου Κ. Νόνα

Μεταπτυχιακή Διατριβή

για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
Επιστήμη και Τεχνολογία Ηλεκτρολόγου Μηχανικού και Μηχανικού Υπολογιστών
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Βόλος, Ιούνιος 2018

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 29 Ιουνίου 2018.

Ευμορφόπουλος Νέστωρ,

Επίκουρος καθηγητής

Υπογραφή:

Σταμούλης Γεώργιος,

Καθηγητής

Υπογραφή:

Τσομπανοπούλου Παναγιώτα,

Αναπληρώτρια Καθηγήτρια

Υπογραφή:

Μεταπτυχιακή Διατριβή για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού διπλώματος Ειδίκευσης «Επιστήμη και Τεχνολογία Ηλεκτρολόγου Μηχανικού και Μηχανικού Υπολογιστών» του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας, στο πλαίσιο του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών του Τμήματος Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας.

Νόνας Ευάγγελος,

Διπλωματούχος Μηχανικός ΗΥ, Τηλεπικοινωνιών και Δικτύων Πανεπιστημίου Θεσσαλίας
Υπογραφή:

Copyright © Nonas Evangelos, 2018

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. *All rights reserved.*

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Ο Αριστοτέλης θεωρούσε ότι οι γυναίκες έχουν λιγότερα δόντια από τους άντρες. Αν και παντρεύτηκε δυο φορές, ποτέ δεν του πέρασε από το μυαλό να επαληθεύσει αυτή τη θεωρία ελέγχοντας τα στόματα των συζύγων του.

Μπέρτραντ Ράσελ, 1872-1970, Βρετανός μαθηματικός και φιλόσοφος

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

Περίληψη

Επιστήμη και Τεχνολογία Ηλεκτρολόγου Μηχανικού και Μηχανικού Υπολογιστών
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Μεταπτυχιακή Διατριβή

του Ευάγγελου Κ. Νόνα

Η δραστικά αυξανόμενη πολυπλοκότητα της προσομοίωσης ηλεκτρικών κυκλωμάτων που προκύπτουν από πραγματικά προβλήματα και ιδιαίτερα από δίκτυα τροφοδοσίας ολοκληρωμένων κυκλωμάτων, καθιστά αναγκαία την έρευνα για αποδοτικούς προορυθμιστές κατάστασης που θα επιτύχουν ταχύτερη σύγκλιση των επαναληπτικών μεθόδων επίλυση γραμμικών συστημάτων.

Στην εργασία αυτή θα μελετηθούν, οι πολλά υποσχόμενοι, προορυθμιστές κατάστασης που προκύπτουν από την εφαρμοσμένη θεωρία γράφων. Θα αναλυθεί το αναγκαίο θεωρητικό υπόβαθρο και οι αλγόριθμοι κατασκευής τους, οι οποίοι ανάγονται στην εξαγωγή ενός επικαλύπτοντος δέντρου και μετέπειτα στην επαύξηση του, μέσω τεχνικών κατάτμησης γράφου.

Κατόπιν, θα αξιολογηθεί η ποιότητα των προορυθμιστών κατάστασης, μέσω πειραματικής διαδικασίας, προορυθμίσης της μεθόδου των συζυγών κλίσεων για την επίλυση πραγματικών κυκλωμάτων που προκύπτουν από τα δίκτυα τροφοδοσίας ολοκληρωμένων κυκλωμάτων της IBM. Τα εξαγόμενα αποτελέσματα θα αναλυθούν εκτενώς, ώστε να προσφέρουν χρήσιμα συμπεράσματα που θα δώσουν έναυσμα για επιπλέον έρευνα προς αυτή την κατεύθυνση.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά όλους όσους συνέβαλαν στο να περατωθεί η παρούσα εργασία.

Πρωτίστως, τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ.Νέστορα Ευμορφόπουλο, για την συνεχή καθοδήγηση τη γενικότερη αρωγή του σε όλη την προσπάθεια μου, καθώς και τους συνεπιβλέποντες καθηγητές μου κ.Γεώργιο Σταμούλη και κα.Παναγιώτα Τσομπανοπούλου, για τις πολύτιμες συμβουλές και υποδείξεις τους.

Στη συνέχεια, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους συναδέλφους και συνεργάτες μου, και ιδιαιτέρως τον κ.Κωνσταντή Νταλούκα για τις εύστοχες συμβουλές και παρατηρήσεις κατά τη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας.

Θα ήθελα επίσης να πω ένα μεγάλο ευχαριστώ από τα βάθη της καρδιάς μου, στην οικογένεια μου, στην Άννα και στους φίλους μου, που στηρίζουν τις επιλογές μου και είναι στο πλευρό μου σε κάθε μου εγχείρημα.

Για τους Γεώργιο Γαρυφάλλου, Ιωάννη Κωνσταντέλια, Κωνσταντίνο Θεμελή, Χρήστο Ιωαννίδη και Χρυσόστομο Χατζηγεωρίου, που είχα την τύχη και την τιμή, να γνωρίσω και να φοιτήσω μαζί τους στο Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, εύχομαι κάθε προσωπική, ακαδημαϊκή και επαγγελματική επιτυχία.

Στην οικογένεια μου, στην Άννα και στους φίλους μου

Περιεχόμενα

| | |
|---|-----------|
| Περίληψη | iv |
| Ευχαριστίες | v |
| Κατάλογος Σχημάτων | ix |
| Κατάλογος Πινάκων | x |
| 1 Εισαγωγή | 1 |
| 1.1 Το πρόβλημα της προσομοίωσης κυκλωμάτων | 1 |
| 1.2 Η συμβολή της παρούσας εργασίας | 2 |
| 1.3 Διάρθρωση της εργασίας | 2 |
| 2 Το πρόβλημα της Προσομοίωσης Κυκλωμάτων | 4 |
| 2.1 Βασικές έννοιες ηλεκτρικών κυκλωμάτων | 4 |
| 2.1.1 Γραμμικά κυκλώματα | 4 |
| 2.1.2 Κυκλωματικά στοιχεία | 4 |
| 2.2 Τροποποιημένη ανάλυση κόμβων | 5 |
| 2.3 Μεταβατική ανάλυση και ανάλυση συνεχούς | 7 |
| 2.3.1 Μεταβατική ανάλυση | 7 |
| 2.3.2 Ανάλυση συνεχούς | 8 |
| 2.4 Η μέθοδος συζυγών κλίσεων | 9 |
| 2.4.1 Εισαγωγή | 9 |
| 2.4.2 Μαθηματικός φορμαλισμός | 10 |
| 2.4.3 Σύγκλιση της μεθόδου | 11 |
| 2.4.4 Χρήση προρυθμιστών κατάστασης | 12 |
| 3 Θεωρία Γράφων και Θεωρία Στήριξης | 13 |
| 3.1 Εισαγωγή στη θεωρία γράφων | 13 |
| 3.2 Εισαγωγή στην αλγεβρική θεωρία γράφων | 13 |
| 3.3 Η Θεωρία στήριξης | 15 |
| 4 Προρυθμιστές κατάστασης Επικαλύπτοντων Δέντρων | 18 |
| 4.1 Εισαγωγή | 18 |
| 4.2 Ελάχιστο Επικαλύπτον Δέντρο | 18 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 4.3 | Επικαλύπτον Δέντρο Χαμηλής Έκτασης | 19 |
| 4.4 | Υβριδικά Δέντρα | 21 |
| 5 | Προρυθμιστές Επαυξημένων Επικαλύπτοντων Δέντρων | 22 |
| 5.1 | Εισαγωγή | 22 |
| 5.2 | Επαύξηση με βάση την έκταση των ακμών | 22 |
| 5.3 | Επαύξηση με Βάση το βάρος των ακμών | 24 |
| 6 | Αναδρομική Επίλυση Συστημάτων | 26 |
| 6.1 | Εισαγωγή | 26 |
| 6.2 | Μερική παραγοντοποίηση <i>Cholesky</i> | 26 |
| 6.3 | Αλγόριθμος ενός επιπέδου | 27 |
| 6.4 | Ο αναδρομικός επιλυτής | 28 |
| 7 | Πειραματική Διαδικασία και Αποτελέσματα | 30 |
| 7.1 | Περιγραφή της Πειραματικής Διαδικασίας | 30 |
| 7.2 | Ανάλυση της Πυκνότητας Γράφους | 31 |
| 7.2.1 | Πυκνότητα γράφου | 31 |
| 7.2.2 | Διάταξεις πλέγματος | 32 |
| 7.3 | Δίκτυο τροφοδοσίας 1 | 33 |
| 7.4 | Δίκτυο τροφοδοσίας 2 | 36 |
| 7.5 | Δίκτυο τροφοδοσίας 6 | 39 |
| 7.6 | Ερμηνεία των αποτελεσμάτων | 43 |
| 7.6.1 | Επίδοση Επικαλύπτοντων Δέντρων | 43 |
| 7.6.2 | Επίδοση επαυξημένων επικαλύπτοντων δέντρων | 44 |
| 7.6.3 | Παρατηρήσεις και Προβληματισμοί | 45 |
| 8 | Μελλοντικές Επεκτάσεις | 46 |

Κατάλογος Σχημάτων

| | | |
|------|--|----|
| 4.1 | <i>Star decomposition</i> | 20 |
| 5.1 | Πολυεπίπεδη κατάτμηση | 25 |
| 7.1 | Δίκτυο τροφοδοσίας ολοκληρωμένου κυκλώματος | 32 |
| 7.2 | Γράφος πλέγματος | 32 |
| 7.3 | Γράφος μονοπατιού | 33 |
| 7.4 | Αραιός πίνακας δικτύου τροφοδοσίας 1 | 34 |
| 7.5 | Σχετικό υπόλοιπο σύγκλισης δικτύου τροφοδοσίας 1 | 35 |
| 7.6 | Σύγκριση βημάτων σύγκλισης δικτύου τροφοδοσίας 1 | 36 |
| 7.7 | Σύγκριση χρόνου σύγκλισης δικτύου τροφοδοσίας 1 | 36 |
| 7.8 | Αραιός πίνακας δικτύου τροφοδοσίας 2 | 37 |
| 7.9 | Σχετικό υπόλοιπο σύγκλισης δικτύου τροφοδοσίας 2 | 38 |
| 7.10 | Σύγκριση χρόνου σύγκλισης δικτύου τροφοδοσίας 2 | 39 |
| 7.11 | Σύγκριση χρόνου σύγκλισης δικτύου τροφοδοσίας 2 | 39 |
| 7.12 | Αραιός πίνακας δικτύου τροφοδοσίας 6 | 40 |
| 7.13 | Σχετικό υπόλοιπο σύγκλισης δικτύου τροφοδοσίας 6 | 41 |
| 7.14 | Σύγκριση χρόνου σύγκλισης δικτύου τροφοδοσίας 6 | 42 |
| 7.15 | Σύγκριση βημάτων σύγκλισης δικτύου τροφοδοσίας 6 | 42 |
| 7.16 | Μετρικές των επικ. δέντρων δικτύου τροφοδοσίας 6 | 43 |

Κατάλογος Πινάκων

| | | |
|------|--|----|
| 7.1 | Πληροφορίες κυκλωματικών γράφων δικτύων τροφοδοσίας | 33 |
| 7.2 | Επίδοση επικ. δέντρων στο δίκτυο τροφοδοσίας 1 | 34 |
| 7.3 | Επίδοση επαυξ. ως προς την έκταση δέντρων στο δίκτυο τροφοδοσίας 1 . . . | 35 |
| 7.4 | Επίδοση επαυξ. ως προς την βάρος δέντρων στο δίκτυο τροφοδοσίας 1 . . . | 35 |
| 7.5 | Επίδοση επικ. δέντρων στο δίκτυο τροφοδοσίας 2 | 37 |
| 7.6 | Επίδοση επαυξ. ως προς την έκταση δέντρων στο δίκτυο τροφοδοσίας 2 . . . | 38 |
| 7.7 | Επίδοση επαυξ. ως προς το βάρος δέντρων στο δίκτυο τροφοδοσίας 2 | 38 |
| 7.8 | Επίδοση επικ. δέντρων στο δίκτυο τροφοδοσίας 6 | 40 |
| 7.9 | Επίδοση επαυξ. ως προς την έκταση δέντρων στο δίκτυο τροφοδοσίας 2 . . . | 41 |
| 7.10 | Επίδοση επαυξ. ως προς το βάρος στο δίκτυο τροφοδοσίας 2 | 41 |
| 7.11 | Μετρικές επικ. δέντρων στο δίκτυο τροφοδοσίας 2 | 44 |

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Το πρόβλημα της προσομοίωσης κυκλωμάτων

Το πρόβλημα της προσομοίωσης κυκλωμάτων συνίσταται στην χρήση λογισμικού το οποίο μέσω μαθηματικών μοντέλων αναπαράγει την συμπεριφορά ενός πραγματικού ηλεκτρικού κυκλώματος.

Στην σύγχρονη εποχή το μέγεθος και η πολυπλοκότητα των ηλεκτρικών κυκλωμάτων καθιστά αδύνατη τη μελέτη της συμπεριφοράς ενός ηλεκτρικού κυκλώματος χωρίς την χρήση του απαραίτητου λογισμικού (προσομοιωτή), το οποίο θα εκτελεστεί σε ένα υπολογιστικό σύστημα.

Οι προσομοιωτές αναλαμβάνουν να υπολογίσουν τις τάσεις των κόμβων του κυκλώματος, καθώς και τα ρεύματα ορισμένων κλάδων. Μέσω της τροποποιημένης ανάλυσης κόμβων (*modified nodal analysis*), της πιο διαδεδομένης μεθόδου μοντελοποίησης ηλεκτρικών κυκλωμάτων, ο προσομοιωτής δημιουργεί εξισώσεις, τη λύση των οποίων προκύπτουν τα επιθυμητά αποτελέσματα.

Η επίλυση των εξισώσεων, έγκειται εν τέλει, στην επίλυση ενός γραμμικού συστήματος. Ωστόσο, καθώς η κλίμακα αυξάνεται όλο και περισσότερο, τα ολοκληρωμένα κυκλώματα, καθώς και τα δίκτυα παροχής ηλεκτρικής ενέργειας, έχουν γίνει τόσο περίπλοκα, που ακόμα και οι προσομοιωτές απαιτούν αρκετούς υπολογιστικούς πόρους και αρκετό χρόνο για την επίλυση των γραμμικών συστημάτων, από τα οποία προκύπτουν τα αποτελέσματα της προσομοίωσης.

Για τον λόγο αυτό, η έρευνα στρέφεται προς την αναζήτηση τεχνικών για την βελτίωση των προσομοιωτών, ώστε να επιτυγχάνεται ταχύτερη επίλυση των γραμμικών συστημάτων.

Πέρα από την χρήση υπολογιστικά ισχυρότερων μηχανημάτων, μεγάλο ερευνητικό ενδιαφέρον παρουσιάζεται στην κατεύθυνση αναζήτησης ταχύτερων αλγορίθμων για την επίλυση γραμμικών συστημάτων.

1.2 Η συμβολή της παρούσας εργασίας

Στην παρούσα εργασία εφαρμόζονται τεχνικές από την σύγχρονη θεωρία γράφων και την θεωρία στήριξης (*support – theory*), για την εξαγωγή αποδοτικών προρρυθμιστών κατάστασης (*preconditioners*), ώστε να επιτυχυνθεί η ταχύτητα σύγκλισης της μεθόδου συζυγών κλίσεων (*conjugate gradient*).

Πρωταρχικός στόχος είναι να αναλυθούν οι αλγόριθμοι για την κατασκευή των προρρυθμιστών κατάστασης και εν συνεχεία, να συγκριθεί η ποιότητα και η αποδοτικότητα, στην επίλυση των γραμμικών συστημάτων, των προκύπτων προρρυθμιστών κατάστασης. Στα πλαίσια της εργασίας, θα μελετηθεί κατά πόσο μπορεί να βελτιωθεί ο αριθμός επαναλήψεων της *conjugate gradient* και αντίστοιχα ο χρόνος εύρεσης της λύσης.

Οι προρρυθμιστές κατάστασης βασίζονται σε υπογράφους του γράφου του κυκλώματος. Ξεκινώντας από ένα επικαλύπτον δέντρο του γράφου, εφαρμόζονται αλγόριθμοι επαύξησης, οι οποίοι στηρίζονται κυρίως σε τεχνικές κατάτμησης γράφου. Πιο συγκεκριμένα, τα επικαλύπτοντα δέντρα που θα μελετηθούν είναι το ελάχιστο επικαλύπτον δέντρο, το επικαλύπτον δέντρο χαμηλής έκτασης και το υβριδικό επικαλύπτον δέντρο. Το υβριδικό επικαλύπτον δέντρο, αποτελεί πρώτη προσπάθεια δημιουργίας αλγορίθμου εξαγωγής επικαλύπτοντος δέντρου λαμβάνοντας υπόψιν τόσο το βάρος όσο και την έκταση. Οι δύο αλγόριθμοι επαύξησης που θα μελετηθούν, στηρίζονται στην έννοια της έκτασης και του βάρους αντίστοιχα.

1.3 Διάρθρωση της εργασίας

Στο κεφάλαιο 2 παρουσιάζεται η μέθοδο τροποποιημένης ανάλυσης κόμβων και το απαραίτητο μαθηματικό υπόβαθρο αυτής, οι εξισώσεις δηλαδή, που διέπουν τη συμπεριφορά των γραμμικών ηλεκτρικών κυκλωμάτων. Θα δούμε μέσα από τις εξισώσεις πως οδηγούμαστε στην επίλυση γραμμικών συστημάτων και πως η φύση του προβλήματος που μελετάμε, επηρεάζει τον τρόπο με τον οποίο προσεγγίζουμε τα συστήματα αυτά. Ιδιαίτερη έμφαση θα δοθεί στην μέθοδο συζυγών κλίσεων (*conjugate gradient*), η οποία θα μας αποσχολήσει ιδιαίτερα στο υπόλοιπο της εργασίας αυτής. Επίσης, έμφαση θα δοθεί και στην έννοια του προρρυθμιστή κατάστασης (*preconditioner*), η οποία σχετίζεται άμεσα με την μέθοδο συζυγών κλίσεων.

Στο κεφάλαιο 3 θα εισάγουμε τις βασικές έννοιες που χρειαζόμαστε από την θεωρία γράφων. Κατόπιν, θα μεταβούμε στην αλγεβρική θεωρία γράφων, η οποία γεφυρώνει την γραμμική άλγεβρα με την θεωρία γράφων και θέτει τις απαραίτητες μαθηματικές βάσεις, ώστε έννοιες της γραμμικής άλγεβρας να αντιστοιχίζονται επαρκώς στο πεδίο της γραφοθεωρίας και αντίστροφα. Τέλος, βάση της σύγχρονης θεωρίας στήριξης, θα αναλύσουμε τα θεωρήματα τα οποία μας επιτρέπουν να αναζητήσουμε βελτιώσεις στην επίλυση γραμμικών συστημάτων κατασκευάζοντας αποδοτικούς προορυθμιστές κατάστασης.

Στο κεφάλαιο 4 θα εξετάσουμε τους προορυθμιστές κατάστασης οι οποίοι προκύπτουν από επικαλύπτοντα δέντρα του γράφου του ηλεκτρικού κυκλώματος. Θα εξηγήσουμε τους αλγόριθμους εξαγωγής των επικαλύπτοντων δέντρων, ξεκινώντας από τον αλγόριθμο εξαγωγής επικαλύπτοντος δέντρου ελάχιστου βάρους (*minimum weight spanningtree*). Έπειτα, θα εισάγουμε την έννοια της έκτασης (*stretch*) και θα μελετήσουμε τον αλγόριθμο κατασκευής επικαλύπτοντος δέντρου χαμηλής έκτασης (*low stretch spanningtree*). Τέλος, θα εισάγουμε την προσπάθεια συνδυασμού των δύο τεχνικών ώστε να εκμεταλλευτούμε τα πλεονεκτήματά τους και να σχεδιάσουμε έναν αλγόριθμο κατασκευής υβριδικού δέντρου (*hybrid – tree*).

Στο κεφάλαιο 5 θα δούμε πως μπορούμε να βελτιώσουμε την απόδοση των προορυθμιστών κατάστασης, προσθέτοντας ακμές στα επικαλύπτοντα δέντρα. Οι αλγόριθμοι για την προσθήκη ακμών βασίζονται εν γένει στην κατάτμηση του αρχικού γράφου. Έπειτα το κριτήριο επιλογής των επιπρόσθετων ακμών, αφορά είτε το βάρος, είτε την έκταση είτε και τα δύο. Στα πλαίσια αυτών των μεθοδολογιών θα εξετάσουμε τον αλγόριθμο των *Spielman* και *Teng* για την παραγωγή επαυξημένων δέντρων με κριτήριο την χαμηλής έκταση και κατόπιν θα εισάγουμε έναν αντίστοιχο αλγόριθμο με κριτήριο το βάρος των ακμών, στηριζόμενοι στο εργαλείο κατάτμησης γράφων *METIS*. Τέλος θα μελετήσουμε κατα πόσο μπορούμε να συνδυάσουμε τα κριτήρια αυτά για την επαύξηση των δέντρων.

Στο κεφάλαιο 6 θα παραθέσουμε μια σύντομη ανάλυση των *Spielman* και *Teng* σχετικά με τον τρόπο επίλυσης του συστήματος ενός προορυθμιστή κατάστασης και θα παρουσιάσουμε αναλυτικότερα την ιδέα τους για ανδρομικούς επιλυτές.

Στο κεφάλαιο 7 θα αναλύσουμε την πειραματική διαδικασία εξαγωγής των αποτελεσμάτων. Αφού παρουσιάσουμε τα πειράματα θα εξετάσουμε και θα ερμηνεύσουμε τα αποτελέσματα, προκειμένου να καταλήξουμε σε συμπεράσματα σχετικά με την αποδοτικότητα, την αποτελεσματικότητα και το κόστος κατασκευής του εκάστοτε αλγόριθμου.

Τέλος, στο κεφάλαιο 8 θα παρουσιάσουμε περιληπτικά προτάσεις για μελλοντικές επεκτάσεις που εγείρονται από την έρευνα και τα αποτελέσματα τις παρούσας εργασίας.

Κεφάλαιο 2

Το πρόβλημα της Προσομοίωσης Κυκλωμάτων

2.1 Βασικές έννοιες ηλεκτρικών κυκλωμάτων

2.1.1 Γραμμικά κυκλώματα

Ένα ηλεκτρικό κύκλωμα είναι ένα διασυνδεδεμένο δίκτυο ηλεκτρικών στοιχείων στο οποίο δημιουργούνται κλειστές, αγωγίμες από το ηλεκτρικό ρεύμα διαδρομές.

Στην παρούσα εργασία ασχολούμαστε με γραμμικά κυκλώματα, τα οποία υπακούουν την αρχή της επαλληλίας (*superposition principle*). Έτσι, η έξοδος ενός κυκλώματος $F(x)$, όταν εφαρμόζεται ένας γραμμικός συνδυασμός σημάτων $\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$ ως είσοδος, θα ισούται με τον γραμμικό συνδυασμό των εξόδων των σημάτων $x_1(t)$ και $x_2(t)$ όταν αυτά εφαρμόζονται ξεχωριστά, δηλαδή:

$$F\{\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)\} = \alpha_1 F\{x_1(t)\} + \alpha_2 F\{x_2(t)\}. \quad (2.1)$$

Άρα, μπορούμε να θεωρούμε γραμμικό, ένα ηλεκτρικό κύκλωμα του οποίου οι τιμές των ηλεκτρικών στοιχείων (αντίσταση, χωρητικότητα, επαγωγή, κέρδος, κτλ.) δεν αλλάζουν σε σχέση με τα επίπεδα τάσης και ρεύματος του κυκλώματος.

2.1.2 Κυκλωματικά στοιχεία

Τα κυκλωματικά στοιχεία διακρίνονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες: τα ενεργά και τα παθητικά στοιχεία.

Τα παθητικά στοιχεία είναι εκείνα τα κυκλωματικά στοιχεία τα οποία καταναλώνουν (αλλά δεν παράγουν) ενέργεια. Η ενέργεια που καταναλίσκεται είτε αποθηκεύεται (σε ενέργεια ηλεκτρικού ή μαγνητικού πεδίου) είτε μετατρέπεται σε άλλη μορφή ενέργειας (π.χ. θερμική ενέργεια), χωρίς βέβαια να ενισχύεται η ισχύς της εξόδου των στοιχείων αυτών. Τα κυριότερα παθητικά στοιχεία είναι ο αντιστάτης, ο πυκνωτής και το πηνίο.

Αντίθετα, ένα κυκλωματικό στοιχείο το οποίο δεν είναι παθητικό καλείτε ενεργό και παρέχει ηλεκτρική ενέργεια στο κύκλωμα. Τα ενεργά στοιχεία αναφέρονται συχνά και ως πηγές. Στην κατηγορία αυτή ανήκουν οι ανεξάρτητες πηγές τάσεις και οι ανεξάρτητες πηγές ρεύματος.

Μια πιο ενδιαφέρουσα κατηγοριοποίηση είναι με βάση την γενική μορφή της χαρακτηριστικής εξίσωσης που διέπει το στοιχείο. Βάση αυτής προκύπτουν τα, έστω m_1 στο πλήθος, στοιχεία της ομάδας 1, με γενική μορφή εξίσωσης:

$$i_k(t) = g_k u_k(t) + c_k \frac{du_k(t)}{dt} + s_k(t). \quad (2.2)$$

και αντίστοιχα, έστω m_2 στο πλήθος, τα στοιχεία της ομάδας 2, με γενική μορφή εξίσωσης:

$$u_k(t) = l \frac{di_k(t)}{dt} + s_k(t). \quad (2.3)$$

2.2 Τροποποιημένη ανάλυση κόμβων

Για την διαμόρφωση των εξισώσεων της τροποποιημένης ανάλυσης κόμβων θα γράψουμε με την βοήθεια των νόμων του *Kirchoff* και του ελαττωμένου, ως προς τον κόμβο αναφοράς (γείωση), τις εξισώσεις της προηγούμενης παραγράφου σε μορφή πινάκων.

Αρχικά, σημειώνουμε πως για τον κατευθυνόμενο γράφο του κυκλώματος με $n - 1$ κορυφές και $m = m_1 + m_2$ ακμές ο πίνακας πρόσπτωσης ορίζεται ως:

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν η ακμή } j \text{ εξέρχεται από την κορυφή } i \\ -1, & \text{αν η ακμή } j \text{ εξέρχεται από την κορυφή } i \\ 0, & \text{αν η ακμή } j \text{ δεν συνδέεται με την κορυφή } i \end{cases} \quad (2.4)$$

Στην περίπτωση των ηλεκτρικών κυκλωμάτων, οι κορυφές αντιστοιχούν σε κόμβους και οι ακμές σε κλάδους του κυκλώματος. Οι κατεύθυνση των ακμών δε, προκύπτει από την συζευγμένη φορά ρεύματος που ρέει στον εκάστοτε κλάδο.

Κατόπιν, σχηματίζουμε τους νόμους του *Kirchoff*, με την βοήθεια του πίνακα πρόσπτωσης.

1. Ο νόμος ρευμάτων του *Kirchhoff(KCL)* μας λέει ότι το αλγεβρικό άθροισμα των ρευμάτων σε κάθε κόμβο ενός κυκλώματος ισούται με το μηδέν.

$$\sum_{k=1}^n i_k(t) = 0 \Leftrightarrow A\vec{i}(t) = \vec{0}. \quad (2.5)$$

2. Ο νόμος τάσεων του *Kirchhoff(KVL)* μας λέει ότι σε κάθε κλειστό βρόγχο ενός κυκλώματος, το άθροισμα των τάσεων (διαφορών δυναμικού) των επιμέρους κλάδων που απαρτίζουν τον βρόγχο ισούται με το μηδέν.

$$\sum_{k=1}^m v_k(t) = 0 \Leftrightarrow \vec{u}(t) = A^T \vec{v}(t). \quad (2.6)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις αφορούν αντίστοιχα τα στοιχεία των ομάδων 1 και 2. Έτσι λοιπόν προκύπτουν οι αντίστοιχες εξισώσεις:

$$\vec{u}_1(t) = A_1^T \vec{v}(t), \quad (2.7)$$

$$\vec{u}_2(t) = A_2^T \vec{v}(t). \quad (2.8)$$

Αντίστοιχα, τώρα για τα στοιχεία των ομάδων 1 και 2, γράφουμε τις χαρακτηριστικές υπό την μορφή πινάκων:

$$\vec{i}_1(t) = G\vec{u}_1(t) + C\frac{d\vec{u}_1(t)}{dt} + \vec{s}_1(t), \quad (2.9)$$

$$\vec{u}_2(t) = L\frac{d\vec{i}_2(t)}{dt} + \vec{s}_2(t). \quad (2.10)$$

Επόμενο βήμα είναι η αντικατάσταση της εξίσωσης 2.7 στην εξίσωση 2.9 και αντίστοιχα της εξίσωσης 2.8 στην εξίσωση 2.10. Μετά την αντικατάσταση προκύπτουν οι ακόλουθες εξισώσεις:

$$A_1 G A_1^T \vec{v}_1(t) + A_1 C A_1^T \frac{d\vec{v}_1(t)}{dt} + A_2 \vec{i}_2(t) = -A_1 \vec{s}_1(t) \quad (2.11)$$

$$A_2^T \vec{v}(t) - L \frac{d\vec{i}_2(t)}{dt} = \vec{s}_2(t) \quad (2.12)$$

Ο συνδυασμός των εξισώσεων 2.11 και 2.12 δίνει ένα επεκταμένο (σύνθετο) σύστημα εξισώσεων διαστάσεων $[(n-1) + m_2] \times [(n-1) + m_2]$, το οποίο το γράφουμε σε έναν ως εξής:

$$\begin{bmatrix} A_1 G A_1^T & A_2 \\ A_2^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{v}_1(t) \\ \vec{i}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_1 C A_1^T & 0 \\ 0 & -L \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \vec{v}_1(t) \\ \vec{i}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_1 \vec{s}_1(t) \\ \vec{s}_2(t) \end{bmatrix}$$

Θέτοντας του πίνακες και τα διανύσματα ως:

$$\tilde{G} = \begin{bmatrix} A_1 G A_1^T & A_2 \\ A_2^T & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{bmatrix} A_1 C A_1^T & 0 \\ 0 & -L \end{bmatrix}, \quad \vec{x}(t) = \begin{bmatrix} \vec{v}_1(t) \\ \vec{i}_2(t) \end{bmatrix}, \quad \vec{e}(t) = \begin{bmatrix} -A_1 \vec{s}_1(t) \\ \vec{s}_2(t) \end{bmatrix}$$

λαμβάνουμε λαμβάνουμε τελικά, σε μια πιο ευδιάκριτη μορφή, ένα σύστημα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης με σταθερούς συντελεστές:

$$\tilde{G}\vec{x}(t) + \tilde{C}\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \vec{e}(t) \Leftrightarrow \tilde{G}\vec{x}(t) + \tilde{C}\dot{\vec{x}}(t) = \vec{e}(t) \quad (2.13)$$

2.3 Μεταβατική ανάλυση και ανάλυση συνεχούς

2.3.1 Μεταβατική ανάλυση

Η μεταβατική ανάλυση συνίσταται στον υπολόγισμό της χρονικής απόκρισης του κυκλώματος για δεδομένες διεγέρσεις.

Για δεδομένο διάνυσμα διεγέρσεων $\vec{e}(t)$ και θεωρώντας πως το διάνυσμα των αποκρίσεων $\vec{x}(t)$ είναι καθορισμένο για μία δεδομένη χρονική στιγμή t_0 ως $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$ (αρχική συνθήκη), τότε το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\begin{cases} \tilde{G}\vec{x}(t) + \tilde{C}\dot{\vec{x}}(t) = \vec{e}(t) \\ \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \end{cases}$$

έχει μοναδική λύση $\vec{x}(t)$ (υπό ορισμένες συνθήκες) σε ένα διάστημα $[t_0, t_f]$ σε διακριτούς χρόνους $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m = t_f$.

Για τον υπολογισμό των διακριτών λύσεων πρέπει να διακριτοποιηθεί η πρώτη παράγωγος με μία από τις ακόλουθες προσεγγίσεις.

1. Προσέγγιση *Backward Euler (BE)* ή *Implicit Euler (IE)*

Σύμφωνα με αυτήν την μέθοδο η παράγωγος προσεγγίζεται ως εξής:

$$\frac{d\vec{x}(t_k)}{dt} \approx \frac{1}{h}[\vec{x}(t_k) - \vec{x}(t_{k-1})]$$

και επομένως το γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων της εξίσωσης 2.13 μετατρέπεται στο παρακάτω, αλγεβρικό γραμμικό σύστημα:

$$(\tilde{G} + \frac{1}{h}\tilde{C})\vec{x}(t_k) = \vec{e}(t_k) + \frac{1}{h}\tilde{C}\vec{x}(t_{k-1})$$

2. Προσέγγιση Trapezoidal (TR)

Σύμφωνα με αυτήν την μέθοδο η παράγωγος προσεγγίζεται ως εξής:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{d\vec{x}(t_k)}{dt} + \frac{d\vec{x}(t_{k-1})}{dt}\right] \approx \frac{1}{h}[\vec{x}(t_k) - \vec{x}(t_{k-1})]$$

και επομένως το γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων της εξίσωσης 2.13 μετατρέπεται στο παρακάτω, αλγεβρικό γραμμικό σύστημα:

$$\tilde{G}[\vec{x}(t_k) + \vec{x}(t_{k-1})] + \tilde{G}\left[\frac{\vec{x}(t_k)}{dt} + \frac{\vec{x}(t_{k-1})}{dt}\right] = \vec{e}(t_k) + \vec{e}(t_{k-1}) \Leftrightarrow \quad (2.14)$$

$$(\tilde{G} + \frac{2}{h}\tilde{C})\vec{x}(t_k) = \vec{e}(t_k) + \vec{e}(t_{k-1}) + (-\tilde{G} - \frac{2}{h}\tilde{C})\vec{x}(t_{k-1}) \quad (2.15)$$

Σημειώνουμε, πως η προσέγγιση *trapezoidal* είναι πιο ακριβής και προσεγγίζει καλύτερα την πραγματική λύση $\vec{x}(t)$ για τις διακριτές στιγμές t_k . Άλλο ένα πλεονέκτημα έναντι της *BE*, είναι ότι επιτρέπει μεγαλύτερα βήματα h_k σε μεταβλητή δειγματοληψία. Ωστόσο, σε απότομες μεταβολές των διεγέρσεων είναι λιγότερο ακριβής και καποιες φορές εμφανίζει το φαινόμενο "*ringing*".

2.3.2 Ανάλυση συνεχούς

Στην περίπτωση της ανάλυσης συνεχούς, υπολογίζονται οι αποκρίσεις του κυκλώματος για διάφορα επίπεδα *DC* σημάτων. Επομένως, εφόσον δεν υπάρχει χρονική, η χρονική παράγωγός τόσο των διεγέρσεων, όσο και των αποκρίσεων τους θα είναι μηδέν. Επομένως, το σύστημα της εξίσωσης 2.13 γίνεται:

$$\begin{bmatrix} A_1 G A_1^T & A_2 \\ A_2^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{i}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_1 \vec{s}_1 \\ \vec{s}_2 \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση όπου το κύκλωμα αποτελείται μόνο από στοιχεία της ομάδας 1 (αντιστάτες, πυκνωτές, πηγές ρεύματος), ενώ απουσιάζουν τα στοιχεία της ομάδας 2 (πηνία, πηγές τάσης).

Στην περίπτωση αυτή, είναι εγγυημένο ότι ο πίνακας του συστήματος είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος (*symmetric and positive defined* – *SPD*–).

Σημειώνουμε στο σημείο αυτό ότι, ένας πίνακας A είναι συμμετρικός (*symmetric*) όταν ισχύει $A(i, j) = A(j, i)$ για $i \neq j$, δηλαδή όταν ο πίνακας ισούται με τον ανάστροφό του.

$$A = A^T \Leftrightarrow A \text{ is symmetric, } \forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}. \quad (2.17)$$

Επίσης, ένας πίνακας A είναι θετικά ορισμένος (*positive defined*) όταν η τετραγωνική μορφή είναι θετική για κάθε διάνυσμα εκτός του μηδενικού:

$$\vec{x}^T A \vec{x} > 0, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{x} \neq \vec{0} \Leftrightarrow A \text{ is positive defined.} \quad (2.18)$$

Ένας άλλος ορισμός, για θετικά ορισμένο πίνακα, είναι οι ιδιοτιμές του να είναι θετικές.

Στην περίπτωση αυτή, ο πίνακας \tilde{G} θα είναι $\tilde{G} = A_1 G A_1^T$, το διάνυσμα των αγνώστων $\vec{x} = \vec{v}$ και το διάνυσμα δεξιού μέλους $\vec{b} = -A_1 \vec{s}_1$. Επομένως το γραμμικό σύστημα που καλούμαστε να επιλύσουμε θα είναι:

$$A_1 G A_1^T \vec{v} = -A_1 \vec{s}_1 \Leftrightarrow \tilde{G} \vec{x} = \vec{b}. \quad (2.19)$$

Επομένως, τόσο στην περίπτωση της *transient* ανάλυσης, όσο και στην περίπτωση της *DC* ανάλυσης καταλήγουμε στην επίλυση ενός γραμμικού συστήματος. Στην παρούσα εργασία θα επικεντρωθούμε στην τελευταία περίπτωση, όπου ο πίνακας μας είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος.

2.4 Η μέθοδος συζυγών κλίσεων

2.4.1 Εισαγωγή

Η μέθοδος των συζυγών κλίσεων είναι μια επαναληπτική μέθοδος που προτάθηκε από τους *Hestenes Stiefel* το 1952.

Είναι μια απαναλήπτική μέθοδος για την επίλυση του γραμμικού συστήματος $A\vec{x} = \vec{b}$, όταν ο πίνακας A είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, η οποία συγκλίνει εγγυημένα σε n επαναλήψεις, όπου n η διάσταση του πίνακα.

Για πυκνούς πίνακες η μέθοδος έχει υπολογιστικό κόστος $O(n^3)$, το οποίο δεν διαφέρει από αυτό των άμεσων μεθόδων. Ωστόσο, οι πίνακες που προκύπτουν στα πραγματικά κυκλώματα είναι εξαιρετικά αραιοί.

Υπενθυμίζουμε ότι αραιός είναι ένας πίνακας που το πλήθος των μη-μηδενικών στοιχείων του είναι γραμμικό ως προς την διάσταση του πίνακα: $nz = O(n)$.

Στην περίπτωση των αραιών πινάκων, το υπολογιστικό κόστος της μεθόδου είναι $O(n^2)$.

2.4.2 Μαθηματικός φορμαλισμός

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ πίνακας συμμετρικός και θετικά ορισμένος (SPD), δηλαδή $A = A^T$ και $\vec{x}^T A \vec{x} > 0, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{x} \neq \vec{0}$, και έστω η συνάρτηση n -μεταβλητών:

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{2} \vec{x}^T A \vec{x} - \vec{b}^T \vec{x} \quad , \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

Η $f(\vec{x})$ παρουσιάζει κρίσιμο σημείο (*critical point*) στο \vec{x}^* όπου:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} f(\vec{x})|_{\vec{x}=\vec{x}^*} &= \vec{0} \Leftrightarrow \\ \left(\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} \Big|_{\vec{x}=\vec{x}^*}, \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2} \Big|_{\vec{x}=\vec{x}^*}, \dots, \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_n} \Big|_{\vec{x}=\vec{x}^*} \right) &= \vec{0} \end{aligned}$$

Η k -οστή συνιστώσα του διανύσματος $\vec{\nabla} f(\vec{x})$ θα είναι:

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla} f(\vec{x}))|_k &= \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{1}{2} \vec{x}^T A \vec{x} - \vec{b}^T \vec{x} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\sum_{i=1}^n (x_i \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j) \right] - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\sum_{i=1}^n b_i x_i \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^n a_{kj} x_j + \sum_{i=1}^n x_i a_{ik} \right] - b_k = \end{aligned}$$

και επειδή ο A είναι συμμετρικός, θα ισχύει $a_{ij} = a_{ji}$ και άρα:

$$= \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j - b_k = (A\vec{x} - \vec{b})_k$$

Επομένως λοιπόν είναι $\vec{\nabla} f(\vec{x}) = A\vec{x} - \vec{b}$ και η $f(\vec{x})$ έχει κρίσιμο σημείο στο \vec{x}^* με:

$$\vec{\nabla} f(\vec{x})|_{\vec{x}=\vec{x}^*} = \vec{0} \Leftrightarrow A\vec{x} - \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{b}$$

Το μοναδικό κρίσιμο σημείο είναι σημείο ελαχίστου, καθώς ο Εσσιανός πίνακας (*Hessian matrix*) H της $f(\vec{x})$ έχει στοιχεία:

$$h_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [f(\vec{x})] = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} (f(\vec{x})) \right] = \frac{\partial}{\partial x_j} [(A\vec{x} - \vec{b})_i] = a_{ij}$$

Δηλαδή $H = A$, όπου ο A είναι SPD . Επομένως, και ο H είναι SPD πίνακας. Εάν βρούμε έναν αλγόριθμο για την εύρεση του ελαχίστου της συνάρτησης $f(\vec{x}) = \frac{1}{2}\vec{x}^T A \vec{x} - \vec{b}^T \vec{x}$ θα βρούμε και την λύση του συστήματος $A\vec{x} = \vec{b}$.

Η *conjugate gradient* είναι μια επαναληπτική μέθοδος ελαχιστοποίησης της συνάρτησης: $f(\vec{x}) = \frac{1}{2}\vec{x}^T A \vec{x} - \vec{b}^T \vec{x}$. Σε κάθε βήμα υπολογίζεται μια κατεύθυνση αναζήτησης (*search direction*) $\vec{\rho}^{(i)}$ στο χώρο \mathbb{R}^n η οποία είναι ορθογώνια (A – *orthogonal*) ή συζυγή στην κατεύθυνση αναζήτησης του προηγούμενου βήματος $\vec{\rho}^{(i-1)}$. Εξ' ορισμού:

$$\vec{\rho}^{(i)T} A \vec{\rho}^{(i-1)} = 0 \Leftrightarrow \vec{\rho}^{(i)}, \vec{\rho}^{(i-1)} \text{ } A\text{-orthogonal/conjugate}$$

Έτσι, η τρέχουσα προσέγγιση $\vec{x}^{(i-1)}$ μετακινείται προς την $\vec{\rho}^{(i)}$ και γίνεται:

$$\vec{x}^{(i)} = \vec{x}^{(i-1)} + a_i \vec{\rho}^{(i)}$$

Το βήμα μετακίνησης a_i ελαχιστοποιεί την συνάρτηση $g(a_i) = f(\vec{x}^{(i-1)} + a_i \vec{\rho}^{(i)})$ επί όλων των a_i .

2.4.3 Σύγκλιση της μεθόδου

Ήδη αναφέραμε πως ο αλγόριθμος ολοκληρώνεται σε n το πολύ επαναλήψεις. Αυτό συμβαίνει καθώς n είναι όλες οι ορθογώνιες κατευθύνσεις στον χώρο \mathbb{R}^n .

Σύννηθες μέτρο για την ταχύτητα σύγκλισης είναι το υπόλοιπο (*residual*) κατά την i -οστή επανάληψη $\vec{r}^{(i)} = \vec{b} - A\vec{x}^{(i)}$. Στην περίπτωση αυτή, το κριτήριο σύγκλισης της *cg* είναι:

$$\frac{|\vec{r}^{(i)}|}{|\vec{b}|} \leq \text{itol} \Leftrightarrow \frac{|\vec{b} - A\vec{x}^{(i)}|}{|\vec{b}|} \leq \text{itol} \quad (2.20)$$

Η σχέση αυτή εκφράζει πως το σχετικό μήκος του υπολοίπου ως προς το μήκος του διανύσματος δεξιού μέλους πρέπει να είναι μικρότερο από ένα προκαθορισμένο κατώφλι σύγκλισης (*threshold*). Συνήθως, αυτό το κατώφλι σύγκλισης ορίζεται από τον χρήστη σε μία τιμή 10^{-3} έως 10^{-6} . Για το μήκος (*norm*) χρησιμοποιείται το Ευκλείδειο μήκος (*norm-2*):

$$\vec{r}^{(i)} = \vec{r}_2^{(i)} = \sqrt{\vec{r}^{(i)T} \vec{r}^{(i)}} \quad (2.21)$$

Στην πραγματικότητα ωστόσο, η ταχύτητα σύγκλισης της μεθόδου, εξαρτάται από τον δείκτη κατάστασης $\kappa(A)$ του πίνακα A .

$$\kappa(A) = \frac{\sigma_{\max}(A)}{\sigma_{\min}(A)} \quad (2.22)$$

Υπενθυμίζεται, ότι για κανονικούς πίνακες ($A^*A = AA^*$) ο δείκτης κατάστασης είναι ο λόγος της μέγιστης προς την ελάχιστη (κατ' απόλυτη τιμή) ιδιοτιμή.

$$\kappa(A) = \frac{|\lambda_{\max}(A)|}{|\lambda_{\min}(A)|} \quad (2.23)$$

Αποδεικνύεται ότι η PCG θα βρεί μία ε -προσέγγιση της λύσης το πολύ $O(\sqrt{\kappa(A, b)} \log \varepsilon^{-1})$ επαναλήψεις.

2.4.4 Χρήση προρρυθμιστών κατάστασης

Στην περίπτωση που ο δείκτης κατάστασης $\kappa(A)$ είναι μεγάλος λέμε ότι ο πίνακας είναι και κακή κατάσταση (*ill – conditioned*) και η σύγκλιση της μεθόδου αποδεικνύεται αργή.

Για να επιταχύνουμε την σύγκλιση χρησιμοποιούμε έναν βοηθητικό πίνακα, ο οποίος καλείται προρρυθμιστής κατάστασης. Έτσι λοιπόν όταν ο δείκτης κατάστασης $\kappa(A)$ είναι μεγάλος επιλύουμε το ισοδύναμο σύστημα

$$A\vec{x} = b \Leftrightarrow M^{-1}A\vec{x} = M^{-1}\vec{b}. \quad (2.24)$$

Ο πίνακας M καλείται προρρυθμιστής κατάστασης *preconditioner* του πίνακα A και η ταχύτητα σύγκλισης της μεθόδου εξαρτάται από τον σχετικό δείκτη κατάστασης του A σε σχέση με τον M , $\kappa(A, M)$. Για συμμετρικούς και θετικά ορισμένους πίνακες A και M ο σχετικός δείκτης κατάστασης ορίζεται ως ο λόγος της μεγαλύτερης προς την μικρότερη ιδιοτιμή του AM^{-1} :

$$\kappa(A, M) = \frac{|\lambda_{\max}(M^{-1}A)|}{|\lambda_{\min}(M^{-1}A)|}$$

Η προρρυθμισμένη μέθοδος συζυγών κλίσεων επιλύει σε κάθε βήμα ένα σύστημα του πίνακα M , επομένως μας ενδιαφέρει αφ' ενός, ο πίνακας M να προσεγγίζει πολύ καλά τον πίνακα A και αφ' ετέρου, το σύστημα του πίνακα M να λύνεται ταχύτερα από αυτό του πίνακα A .

Επομένως, η εξαγωγή αποδοτικών προρρυθμιστών κατάστασης αποδεικνύεται απαραίτητη. Στο επόμενο κεφάλαιο θα θέσουμε τις απαραίτητες βάσεις από την θεωρία γράφων, οι οποίες θα μας επιτρέψουν να δημιουργήσουμε αποδοτικούς προρρυθμιστές κατάστασης για το πρόβλημα της προσομοίωσης κυκλωμάτων.

Κεφάλαιο 3

Θεωρία Γράφων και Θεωρία Στήριξης

3.1 Εισαγωγή στη θεωρία γράφων

Θεωρούμε έναν απλό, βεβαρημένο, μη-κατευθυνόμενο γράφο $G = (V, E, w)$, όπου V το σύνολο κορυφών (*vertices*) με $|V| = n$ και E το σύνολο των ακμών (*edges*) με $|E| = m$ του γράφου. Η συνάρτηση $w : E \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ αναθέτει τα βάρη (*weights*) των ακμών, τα οποία είναι πραγματικοί και θετικοί αριθμοί. Δηλώνουμε με $w(u, v)$ την ακμή μεταξύ των κορυφών u και v βάρους w . Ο βαθμός (*degree*) μιας κορυφής $v \in V$ ορίζεται ως το άθροισμα των βαρών των ακμών που προσπίπτουν στην κορυφή v , δηλαδή:

$$\deg(v) = \sum_{(v,u) \in E} w(v,u) \quad (3.1)$$

Για παράδειγμα για τον γράφο του σχήματος...

3.2 Εισαγωγή στην αλγεβρική θεωρία γράφων

Ορίζουμε για τον γράφο $G = (V, E, w)$ τον $n \times n$ πίνακα βαθμών κορυφών (*degree matrix*) D_G , ο οποίος περιέχει την πληροφορία για τους βαθμούς όλων των κορυφών του γράφου G . Ο πίνακας D_G ορίζεται ως:

$$d_{u,v} = \begin{cases} \deg(v), & \text{if } u = v \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (3.2)$$

Αντίστοιχα, ορίζεται ο $n \times n$ πίνακας γειτνίασης (*adjacency matrix*) A_G , ο οποίος περιέχει την πληροφορία για το ποιοί κόμβοι συνδέονται (γειτνιάζουν). Ο πίνακας A_G ορίζεται ως:

$$a_{u,v} = \begin{cases} w(u,v), & \text{if } (u,v) \in E \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.3)$$

Τέλος, ορίζεται ο Λαπλασιανός πίνακας (*Laplacian matrix*) του γράφου ως:

$$L_G = D_G - A_G$$

Προφανώς, ο *Laplacian* πίνακας L_G του γράφου G είναι πίνακας τέτοιος ώστε:

$$L_G(u,v) = \begin{cases} -w(u,v), & \text{if } (u,v) \in E \\ \deg(v), & \text{if } u = v \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.4)$$

Βέβαια, ο *Laplacian* πίνακας L_G του γράφου G ορίζεται και από την τετραγωνική μορφή (*quadratic form*) την οποία προκαλεί για οποιοδήποτε διάνυσμα $\vec{x} \in \mathbb{R}^{|V|} \Leftrightarrow \vec{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$\vec{x}^T L_G \vec{x} = \sum_{w(u,v) \in E} w(u,v) (\vec{x}(u) - \vec{x}(v))^2$$

Ακολουθούν μερικές ιδιότητες του $n \times n$ *Laplacian* πίνακα L_G , με ιδιοτιμές $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{n-1}$, ενός μη-κατευθυνόμενου γράφου G :

- Ο L_G είναι συμμετρικός, θετικά ημι-ορισμένος και έχει διαγώνια κυριαρχία (*SDDM*-πίνακας).
- Αν ο A_D είναι διαγώνιος πίνακας με μη-αρνητικά στοιχεία, τότε ο πίνακας $A_L = A_D + L_G$ είναι *SDDM*₀-πίνακας
- Ο αριθμός εμφανίσεων του 0 ως ιδιοτιμή του πίνακα L_G είναι και ο αριθμός των συνδεδεμένων μερών (*connected components*) του γράφου.
- Η μικρότερη μη-μηδενική ιδιοτιμή του L_G ονομάζεται φασματική διαφορά (*spectral gap*).
- Η δεύτερη μικρότερη ιδιοτιμή του L_G ονομάζεται αλγεβρική συνδεσιμότητα (*algebraic connectivity*) (ή τιμή *Fiedler*). Το μέτρο της τιμής αυτής αντιπροσωπεύει πόσο καλά είναι συνδεδεμένος ο συνολικός γράφος.
- Ο *Laplacian* πίνακας L_G αποτελεί ουσιαστικά ένα τελεστή Λαπλάς (*Laplace operator*) επί του n -διάστατου διανυσματικού χώρου των συναρτήσεων $f : V \rightarrow \mathbb{R}$, όπου V είναι το σύνολο κορυφών του γράφου G και $n = |V|$.

- Για ένα γράφο G με πολλαπλά συνδεδεμένα μέρη (*connected components*) ο L_G είναι μπλοκ διαγώνιος πίνακας (*block diagonal matrix*), όπου το κάθε *block* είναι ο αντίστοιχος *Laplacian* πίνακας του ξεχωριστού υπογράφου (ίσως μετά από επαναδιάταξη των κορυφών).
- Ο κανονικοποιημένος Λαπλασιανός πίνακας (*normalized Laplacian*) ορίζεται ως $D^{1/2}L_GD^{1/2}$ και είναι πιο στενά συνδεδεμένος με την συνπεριφορά των τυχαίων περιπάτων (*random walks*) επί του γράφου G .
- Για δύο γράφους G και H με το ίδιο σύνολο κορυφών, ο γράφος $G + H$ ορίζεται ως ο γράφος που ο *Laplacian* πίνακάς του είναι ο $L_G + L_H$.

Η αλγεβρική θεωρία γράφων στηρίζεται στον ισομορφισμό μεταξύ ενός Λαπλασιανού πίνακα L_G και του αντίστοιχου γράφου G . Οποιοσδήποτε $n \times n$ Λαπλασιανός πίνακας L_G , μπορεί να συσχετιστεί με ένα γράφο $G = (V, E)$, όπου το σύνολο κορυφών του θα είναι το $V = 1, 2, \dots, n$ και θα έχει ακμές ανάμεσα στις κορυφές u και v βάρους $-L_G(u, v)$, για κάθε u, v με $A(u, v)$ μη-μηδενικό.

Μια σημαντική παρατήρηση είναι ότι, εξ' ορισμού, ο Λαπλασιανός πίνακας L_G ενός γράφου G δεν είναι αντιστρέψιμος (*singular matrix*).

Στην περίπτωση των κυκλωμάτων που μελετάμε ωστόσο, είδαμε ότι ο γράφος εξαιρεί τον κόμβο αναφοράς (γείωση). Επομένως τα στοιχεία που συνδέονται στον κόμβο αναφοράς, ουσιαστικά συνεισφέρουν μόνο στα διαγώνια στοιχεία του πίνακα $\tilde{G}\vec{x} = \vec{b}$, καθιστώντας το γραμμικό σύστημα επιλύσιμο.

Στηριζόμενοι σε αυτή την παρατήρηση, και στην δεύτερη, από τις παραπάνω ιδιότητες, συμπεραίνουμε ότι μπορούμε να συνεχίσουμε την ανάλυση πάνω στον γράφο του κυκλώματος, σεβόμενοι ωστόσο τον διαγώνιο πίνακα συνεισφορών των στοιχείων που συνδέονται στον κόμβο αναφοράς. Θα επανέλθουμε στην παρατήρηση αυτή στην επόμενη παράγραφο όπου θα εξηγήσουμε τι είδους επεξεργασία θα επιχειρήσουμε στον γράφο του κυκλώματος.

3.3 Η Θεωρία στήριξης

Η θεωρία στήριξης έχει τις ρίζες της στην επαναστατική ιδέα του *Pravin Vaidya* να κατασκευάσει προρυθμιστές κατάστασης για Λαπλασιανούς πίνακες οι οποίοι προκύπτουν από γράφους, από υπογράφους των γράφων αυτών.

Εκ τότε, έχει γίνει μεγάλη έρευνα προς αυτήν την κατεύθυνση. Η οικογένεια προρυθμιστών κατάστασης που προέκυψαν αναφέρονται στην βιβλιογραφία ως προρυθμιστές κατάστασης υποστηρικτικού γράφου (*support – graph preconditioners*).

Ο κύριος σκοπός της εργασίας αυτής είναι να εξετάσουμε τους αλγορίθμους κατασκευής τέτοιων προορυθμιστών κατάστασης, να τους εφαρμόσουμε στην επίλυση γραμμικών συστημάτων που προκύπτουν από τις ανάγκες της προσομοίωσης κυκλωμάτων και κατόπιν να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα. Στις επόμενες παραγράφους θα μελετήσουμε τους προορυθμιστές κατάστασης υπογράφων που προκύπτουν από επικαλύπτοντα δέντρα και και επαυξημένα επικαλύπτοντα δέντρα.

Το θεωρητικό υπόβαθρο που χρησιμοποιείται για την ανάλυση αυτών καλείται "θεωρία στήριξης" (*support theory*). Η θεωρία στήριξης χρησιμοποιεί συνδυαστικές τεχνικές για να αποδείξει ανισότητες Λαπλασιανών πινάκων που προκύπτουν από γράφους. Ο απώτερος σκοπός της διαδικασίας αυτής είναι να αποδειχθεί ένα φράγμα στις ιδιοτιμές των Λαπλασιανών πινάκων των γράφων, επομένως ένα φράγμα στον σχετικό δείκτη κατάστασης και κατ' επέκταση στον αριθμό βημάτων που απαιτούνται για να συγκλίνει η μέθοδος συζηγών κλίσεων.

Για παράδειγμα, σύμφωνα με την θεωρία στήριξης, αν A και B είναι Λαπλασιανοί πίνακες, και ο πίνακας $A - B$ είναι θετικά ημι-ορισμένος, τότε μπορούμε να γράψουμε:

$$\vec{x}^T (A - B) \vec{x} \geq 0 \Leftrightarrow \vec{x}^T A \vec{x} \geq \vec{x}^T B \vec{x} \Leftrightarrow A \geq B \quad (3.5)$$

Επίσης, σύμφωνα με την θεωρία στήριξης, αν $\sigma_{A,B}$ και $\sigma_{B,A}$ είναι οι ελάχιστες σταθερές για τις οποίες ισχύει: $\sigma_{A,B} A \geq B$ $\sigma_{B,A} B \geq A$ τότε θα ισχύει πως η ελάχιστη και η μέγιστη γενικευμένη ιδιοτιμή των A, B θα είναι αντίστοιχα:

$$\min \lambda_f(A, B) = \lambda_{\min}(AB^+) = \sigma_{A,B}, \quad (3.6)$$

$$\max \lambda_f(A, B) = \lambda_{\max}(AB^+) = \sigma_{B,A}, \quad (3.7)$$

Τέλος, ο γενικευμένος δείκτης κατάστασης των πινάκων (A, B) θα είναι:

$$\kappa(A, B) = \sigma_{A,B} \sigma_{B,A}. \quad (3.8)$$

Έτσι λοιπόν, αν θεωρήσουμε, ένα γράφο $G = (V, E, w)$ και έναν υπογράφο $H = (V, F, w)$ του γράφου αυτού, προκύπτει άμεσα από την τετραγωνική μορφή των Λαπλασιανών πινάκων L_G και L_H ότι:

$$\vec{x}^T L_G \vec{x} = \sum_{(u,v) \in E} w_{u,v} (\vec{x}(u) - \vec{x}(v))^2 \geq \sum_{(u,v) \in F} w_{u,v} (\vec{x}(u) - \vec{x}(v))^2 = \vec{x}^T L_H \vec{x} \quad (3.9)$$

$$\Leftrightarrow L_G \geq L_H \quad (3.10)$$

Τέτοιου είδους ανισότητες εξασφαλίζονται από την θεωρία στήριξης για τους Λαπλασιανούς πίνακες και μας εξασφαλίζουν ότι ο γενικευμένος δείκτης κατάστασης φράσσεται απότελεσματικά. Αυτό είναι και το έναυσμα να μελετήσουμε βαθύτερα αλγόριθμους που παράγουν υπογράφους του γράφου του κυκλώματος.

Στο σημείο αυτό να σημειώσουμε, πως ο τελικός προρυθμιστής κατάστασης θα είναι ο Λαπλασιανός πίνακας του υπογράφου, συν τον διαγώνιο πίνακα συνεισφορών των στοιχείων που προσπίπτουν στον κόμβο αναφοράς (γείωση). Αυτό θα μας εξασφαλίσει ότι και ο προρυθμιστής κατάστασης θα είναι $SDDM_0$ -πίνακας.

Κεφάλαιο 4

Προρυθμιστές κατάστασης Επικαλύπτοντων Δέντρων

4.1 Εισαγωγή

Ως δέντρο είναι ένας συνδεδεμένος, μη-κατευθυνόμενος γράφος, ο οποίος δεν περιέχει κύκλους. Το επικαλύπτον δέντρο ενός γράφου G πρέπει να επικαλύπτει τον G , δηλαδή να περιέχει όλες τις κορυφές του G , και να είναι υπογράφος του G , δηλαδή κάθε ακμή του δέντρου να ανήκει στον γράφο G .

Ένα επικαλύπτον δέντρο του συνδεδεμένου γράφου G μπορεί να οριστεί ως το μέγιστο σύνολο ακμών του G το οποίο δεν σχηματίζει κύκλο ή το ελάχιστο σύνολο ακμών που συνδέει όλες τις ακμές.

4.2 Ελάχιστο Επικαλύπτον Δέντρο

Ο *Pravin Vaidya* πρότεινε ως προρυθμιστή κατάσταση τον Λαπλασιανό πίνακα του μέγιστου επικαλύπτοντος δέντρου. Σύμφωνα με την θεωρία στήριξης αποδείχθηκε εκ των υστέρων, ότι αν T είναι ένα μέγιστο επικαλύπτον δέντρο του γράφου G τότε: $(nm)L_T \geq L_G$.

Ο πίνακας που εξάγεται για την προσομοίωση του κυκλώματος περιέχει ως στοιχεία ηλεκτρικές αγωγιμότητες. Εν τούτοις, ο γράφος του κυκλώματος σχηματίζεται με βάση τις αντιστάσεις και όχι τις αγωγιμότητες. Όμως τα δύο αυτά μεγέθη είναι αντίστροφα και επομένως μπορούμε να εξάγουμε το ελάχιστο επικαλύπτον δέντρο σε σχέση με τις αντιστάσεις.

Για την εξαγωγή του ελάχιστου επικαλύπτοντος δέντρου χρησιμοποιείται ο αλγόριθμος *DJP*, γνωστός κυρίως ως ο αλγόριθμος του *Prim*. Ο αλγόριθμος αυτός προτάθηκε αρχικά το

1930 από τον *Vojtěch Jarník*. Κατόπιν ανακαλύφθηκε αναξάρτητα από τον *Robert Prim* το 1957 και από τον *Edsger Dijkstra* το 1959.

Ο αλγόριθμος ξεκινά από ένα δέντρο T αποτελούμενο από έναν μόνο κόμβο και στη συνέχεια, σε κάθε επανάληψη, αυξάνει το δέντρο T συνδέοντάς το στην πλησιέστερη ελεύθερη κορυφή ως προς την έννοια του βάρους.

Η χρονική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου εξαρτάται από τις δομές δεδομένων που θα χρησιμοποιηθούν. Στην υλοποίηση μας, χρησιμοποιούμε λίστα γειτνίασης για την αναπαράσταση του γράφου, καθώς και μία ουρά προτεραιοτήτων για την ακμή ελαχίστου βάρους που πρόκειται να προστεθεί στο δέντρο. Στην περίπτωση αυτή η χρονική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου αποδυνάμειται πως είναι:

$$O((|E| + |V|) \log |V|) \quad (4.1)$$

4.3 Επικαλύπτον Δέντρο Χαμηλής Έκτασης

Οι *Bohman* και *Hendrickson* θεώρησαν ότι για την κατασκευή αποδοτικών προορυθμιστών κατάστασης από επικαλύπτοντα δέντρα, πρέπει να μετρηθεί η έκταση (*stretch*) του δέντρου.

Αρχικά, ας θεωρήσουμε ένα βεβαρημένο, συνδεδεμένο γράφο $G = (V, E, w)$ όπου $w : E \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ η συνάρτηση που αναθέτει τα βάρη στις ακμές του γράφου. Επίσης, το μήκος μιας ακμής $(e) \in E$ ορίζεται να είναι το αντίστροφο του βάρους της, δηλαδή, $d(e) = 1/w(e)$.

Δεδομένου ενός επικαλύπτοντος δέντρου T του G ορίζεται η απόσταση μεταξύ δύο κορυφών $u, v \in V$ και συμβολίζεται ως $dist_T(u, v)$ να είναι το άθροισμα των μηκών των ακμών στο μοναδικό μονοπάτι (*path*) στο T μεταξύ των κορυφών u και v .

Έτσι λοιπόν ορίζεται η έκταση μίας ακμής $(u, v) \in E$ ως:

$$stretch_T(u, v) = \frac{dist_T(u, v)}{d(u, v)}, \quad (4.2)$$

και η μέση έκταση επί όλων των ακμών του E ως:

$$ave - stretch_T(E) = \frac{1}{|E|} \sum_{(u,v) \in E} stretch_T(u, v) \quad (4.3)$$

Έχει αποδειχθεί ότι κάθε βεβαρημένος, συνδεδεμένος γράφος $G = (V, E, w)$ με n κορυφές και m ακμές περιέχει ένα επικαλύπτον δέντρο τέτοιο ώστε:

$$ave - stretch_T(E) = \exp^{O(\sqrt{\log n \log \log n})} \quad (4.4)$$

Εν τούτοις, οι *Elkin*, *Emek*, *Spielman* και *Teng* παρουσίασαν έναν αλγόριθμο ο οποίος κατασκευάζει ένα επικαλύπτον δέντρο $T \subset E$ για κάθε βεβαρημένο, συνδεδεμένο γράφο $G = (V, E, w)$ τέτοιο ώστε:

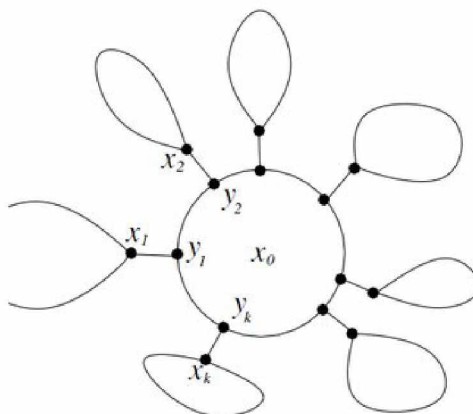
$$ave - stretch_T(E) = O(\log^2 n \log \log n) \quad (4.5)$$

Το όριο αυτό είναι σημαντική βελτίωση σε σχέση με το $\exp^{O(\sqrt{\log n \log \log n})}$ το οποίο είδαμε νωρίτερα. Ο χρόνος εκτέλεσης του αλγορίθμου τους έχει εκτιμηθεί σε

$$O(m \log n + n \log^2 n) \quad (4.6)$$

για βεβαρημένους γράφους. Σημειώνεται ότι ο γράφος πρέπει να είναι απλός και ο αριθμός των ακμών του m να μην υπερβαίνει κατά πολύ το $\binom{n}{2}$, αν και το να θεωρούμε γράφους με το πολύ $n(n+1)$ ακμές είναι αρκετό. Οι γράφοι που προκύπτουν από την προσομοίωση κυκλωμάτων πληρούν αυτές τις προϋποθέσεις οπότε δεν θα μας απασχολήσουν περισσότερο.

Ο τρόπος με τον οποίο κατασκευάζονται τα επικαλύπτοντα δέντρα χαμηλής εκτάσης είναι με της αναδρομικής εφαρμογής μιας τεχνικής διάσπασης γράφων η οποία καλείται 'διάσπαση άστρου' (*star-decomposition*). Μία τέτοια διάσπαση του γράφου προκαλεί μια διαμέριση, του συνόλου κορυφών V , σε σύνολα V_0, V_1, \dots, V_k που σενδέονται σε σχήμα άστρου (*star*): μια κεντρική κορυφή συνδέεται με όλα τα υπόλοιπα σύνολα μέσω μιας μοναδικής ακμής. Η ακμή αυτή καλείται γέφυρα (*bridge-edge*).



ΣΧΗΜΑ 4.1: *Star decomposition*

Όπως φαίνεται και στο σχήμα 4.1 ο αλγόριθμος είναι έτσι σχεδιασμένος ώστε εκτός από τα σύνολα V_0, V_1, \dots, V_k , να επιστρέφει και τα διανύσματα \vec{x}, \vec{y} τα στοιχεία $\vec{x}(i), \vec{y}(i)$ των οποίων αντιστοιχούν στις ακμές-γέφυρες.

4.4 Υβριδικά Δέντρα

Μέχρι στιγμής είδαμε δύο μετρικές βάση των οποίων εξάγουμε επικαλύπτοντα δέντρα: το βάρος και την έκταση. Στην παρούσα εργασία θα επιχειρήσουμε να δώσουμε έναν αλγόριθμο κατασκευής επικαλύπτοντος δέντρου ο οποίος να συνδυάζει τις δύο αυτές μετρικές.

Ο όρος *υβριδικό δέντρο* δεν ανήκει στην επίσημη βιβλιογραφία. Είναι ονομασία που δηλώνει ότι ο αλγόριθμος προσπαθεί να λάβει υπ' όψιν του τόσο το βάρος όσο και την έκταση των ακμών κατά την κατασκευή ενός επικαλύπτοντος δέντρου.

Η ιδέα προήλθε από την πειραματική διαδικασία, καθώς παρατηρήθηκε ότι σε πραγματικά κυκλώματα, το επικαλύπτον δέντρο χαμηλής έκτασης, δεν είναι τόσο αποδοτικό, όσο το ελάχιστο επικαλύπτον δέντρο. Αυτό οφείλεται πιθανότατα στην βαθειά αναδρομή που επιβάλλει ο αλγόριθμος. Η διάσπαση άστρου κατατμήζει τον γράφο συνεχόμενα και επομένως, δύναται να αγνοήσει ακμές οι οποίες είναι εξαιρετικά αγώγιμες για το ηλεκτρικό κύκλωμα.

Έτσι λοιπόν, για να αποφύγουμε την βαθειά αναδρομική φύση στην κατασκευή του δέντρου εφαρμόζουμε την παρακάτω μέθοδο: Εφαρμόζουμε την διάσπαση άστρου και ώστε να προκύψουν τα σύνολα V_0, V_1, \dots, V_k και τα διανύσματα \vec{x}, \vec{y} τα στοιχεία $\vec{x}(i), \vec{y}(i)$ των οποίων αναπαριστούν τις ακμές γέφυρες. Προθέτουμε στο δέντρο τις ακμές $\vec{x}(i), \vec{y}(i)$ και έπειτα εξάγουμε ένα ελάχιστο επικαλύπτον δέντρο για κάθε σύνολο κορυφών $V_i, 0 \leq i \leq k$.

Κεφάλαιο 5

Προρυθμιστές Επαυξημένων Επικαλύπτοντων Δέντρων

5.1 Εισαγωγή

Στην παράγραφο αυτή θα δούμε αλγόριθμους για την κατασκευή προρυθμιστών κατάστασης που προκύπτουν από επαυξημένα επικαλύπτοντα δέντρα. Οι αλγόριθμοι αυτοί καταταμίζουν τον γράφο σε σύνολα και κατόπιν επιλέγουν ακμές οι οποίες εννώνουν τα σύνολα αυτά, με βάση κάποιο κριτήριο.

Να σημειώσουμε ότι οι αλγόριθμοι αυτοί μπορούν να εφαρμοστούν σε οποιοδήποτε δέντρο T επικαλύπτει τον γράφο V , αρκεί πρώτα να έχουν υπολογιστεί κάποιες μετρικές που απαιτούνται από τους αλγόριθμους (π.χ. η έκταση των ακμών με βάση το δέντρο).

5.2 Επαύξηση με βάση την έκταση των ακμών

Ο αλγόριθμος αυτός παρουσιάστηκε από τους *Spielman* και *Teng*, οι οποίοι προσθέτουν ακμές σε επικαλύπτοντα δέντρα χαμηλής έκτασης με κριτήριο την έκταση των επιπλέον ακμών και είναι αρκετά αποδοτικός για επίπεδους γράφους.

Οι επιπλέον ακμές επιλέγονται αφού πρώτα το δέντρο διασπαστεί σε έναν αριθμό από υπόδεντρα. Κατά την διάσπαση, τα υπόδεντρα αυτά μπορούν να έχουν μία κοινή κορυφή ή και να αποτελούνται από μία μοναδική κορυφή. Έτσι, για κάθε ζεύγος υπόδεντρων τα οποία συνδέονται μέσω ακμών του E , επιλέγεται μία από αυτές τις ακμές και προστίθεται στο δέντρο.

Σύμφωνα με τον ορισμό, δεδομένου ενός δέντρου T το οποίο επικαλύπτει ένα σύνολο κορυφών V , μία T -διάσπαση είναι μία διάσπαση του V σε σύνολα W_1, W_2, \dots, W_h έτσι ώστε $V = \cup_{i=1}^h W_i$. Ο γράφος που προκύπτει από το T σε κάθε W_i είναι ένα δέντρο, πιθανώς με μία μόνο κορυφή, και για όλα τα $i \neq j$ να ισχύει $|W_i \cap W_j| \leq 1$.

Επίσης, για ένα επιπρόσθετο σύνολο ακμών E επί του V , μία (T, E) -διάσπαση είναι ένα ζεύγος $(\{W_1, \dots, W_h\}, \rho)$ όπου $\{W_1, \dots, W_h\}$ είναι μία T -διάσπαση και ρ είναι μία αντιστοίχιση κάθε ακμής του E σε ένα σύνολο ή σε ένα ζεύγος συνόλων του $\{W_1, \dots, W_h\}$ έτσι ώστε για κάθε ακμή $(u, v) \in E$ να ισχύει:

- Αν $\rho(u, v) = \{W_i\}$ τότε $\{u, v\} \subseteq W_i$ και
- αν $\rho(u, v) = \{W_i, W_j\}$
- τότε, είτε $u \in W_i$ και $v \in W_j$, είτε $u \in W_j$ και $v \in W_i$.

Βέβαια, καθώς τα σύνολα W_i και W_j μπορούν να έχουν κοινό στοιχείο. Είναι πιθανό να ισχύει ότι: $\rho(u, v) = \{W_i, W_j\}$ με $u \in W_i$ και $v \in W_i \cap W_j$.

Οι *Spielman* και *Teng* αποδεικνύουν ότι μία T -διάσπαση του E μπορεί να βρεθεί γρήγορα, έτσι ώστε το άθροισμα των εκτάσεων των ακμών σε κάθε υπόδεντρο (που δεν αποτελείται από μία μόνο κορυφή) να μην είναι πολύ μεγάλο. Το θεώρημα τους ισχύει για οποιαδήποτε μη-αρνητική συνάρτηση επί των ακμών και όχι μόνο για την έκταση και επομένως διατυπώνεται στην πιο γενική μορφή, η οποία δηλώνει ότι υπάρχει ένας αλγόριθμος, γραμμικής πολυπλοκότητας, που σε είσοδο ένα σύνολο ακμών E επί ενός συνόλου κορυφών V , ένα επικαλύπτον δέντρο T επί του V , μία συνάρτηση $\eta : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ και έναν ακέραιο $1 < t < \sum_{e \in E} \eta(e)$ έχει έξοδο μια (T, E) -διάσπαση $(\{W_1, \dots, W_h\}, \rho)$ τέτοια ώστε:

1. $h \leq t$
2. για όλα τα W_i με $|W_i| > 1$,

$$\sum_{e \in E: W_i \in \rho(e)} \eta(e) \leq \frac{4}{t} \sum_{e \in E} \eta(e). \quad (5.1)$$

Για τεχνικούς λόγους οι *Spielman* και *Teng* ορίζουν την συνάρτηση η να είναι:

$$\eta(e) = \max\{st_T(e), 1\} \quad \text{και} \quad \eta(E) = \sum_{e \in E} \eta(e). \quad (5.2)$$

Δεδομένης μίας (T, E) -διάσπασης $(\{W_1, \dots, W_h\}, \rho)$ ορίζεται η αντιστοίχιση

$$\sigma : \{1, 2, \dots, h\} \times \{1, 2, \dots, h\} \rightarrow E \cup \{\text{undefined}\} \quad (5.3)$$

οπότε και τίθεται

$$\sigma(i, j) = \begin{cases} \arg \max_{e: \rho(e) = \{W_i, W_j\}} w(e)/\eta(e), & \text{αν η ακμή } i \neq j \text{ και υπάρχει τέτοια ακμή } e \\ \text{undefined}, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (5.4)$$

Σε περίπτωση όπου δύο ακμές είναι ισόπαλες θεωρείται e η αλφαβητικά μικρότερη ακμή που μεγιστοποιεί την ποσότητα $w(e)/\eta(e)$ ώστε $\rho(e) = \{W_i, W_j\}$. Σημειώνουμε ότι $\sigma(i, j)$ είναι μία βεβαρημένη ακμή.

Η αντιστοίχιση σ μας λέει ποια ακμή από το σύνολο ακμών E που βρίσκεται μεταξύ των υπόδεντρων W_i και W_j θα προστεθεί στο T . Για κάθε i, j τέτοια ώστε η $\sigma(i, j)$ να ορίζεται και για κάθε $e \in E$ τέτοια ώστε $\rho(e) = \{W_j, W_i\}$ ισχύει ότι

$$\frac{w(e)}{\eta(e)} \leq \frac{w(\sigma(i, j))}{\eta(i, j)}. \quad (5.5)$$

Να σημειώσουμε στο σημείο αυτό πως ο αλγόριθμος των *Spielman* και *Teng* απαιτεί να έχουμε υπολογίσει την έκταση των ακμών $e \in E$ ως προς δέντρο T το οποίο προσπαθούμε να επαυξήσουμε και παραμετροποιήσουμε ως προς το όριο στο οποίο σχηματίζεται ένα σύνολο κορυφών.

5.3 Επαύξηση με Βάση το βάρος των ακμών

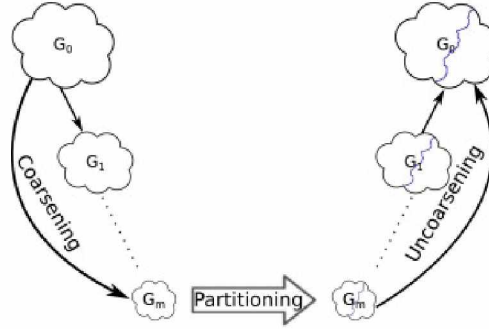
Στο πνεύμα του προηγούμενου αλγορίθμου, προσπαθούμε να κατασκευάσουμε ένα ευρεστικό αλγόριθμο, ο οποίος θα επιλέγει να προσθέσει ακμές σε ένα επικαλύπτον δέντρο T με βασικό κριτήριο το βάρος τους.

Η γενική ιδέα του αλγορίθμου είναι να κατατμήσουμε τον γράφο σε σύνολα και κατόπιν να γεφυρώσουμε τα σύνολα αυτά με βάση την ακμή που φέρει το ελάχιστο βάρος (και συνεπώς την μέγιστη ηλεκτρική αγωγιμότητα).

Αρχικά, για την κατάτμηση του γράφου, μας βοηθά το εργαλείο *METIS*, το οποίο αναπτύχθηκε από τον *George Karypis* και υλοποιεί ευρεστικούς αλγορίθμους κατάτμησης. Οι δύο βασικές προσεγγίσεις είναι είτε πολυεπίπεδη αναδρομική κατάτμηση, είτε κατάτμηση k -διαδρομών. Και οι δύο μέθοδοι εξάγουν καταμήσεις υψηλής ποιότητας. Στην υλοποίηση μας ωστόσο, χρησιμοποιούμε την κατάτμηση k -διαδρομών καθώς μπορούμε να δώσουμε περισσότερες παραμέτρους στο *METIS* και για δευτερεύοντες στόχους κατάτμησης.

Στο σημείο αυτό αναφέρουμε πως η κατάτμηση k -διαδρομών πραγματοποιείται σε τρεις φάσεις, όπως φαίνεται από την παρακάτω εικόνα. Κατά την πρώτη φάση, η οποία καλείται διαδικασία της συμπύκνωσης (*coarsening*), το μέγεθος του γράφου μειώνεται ακολουθιακά.

Έπειτα, ακολουθεί η δεύτερη φάση, η φάση αρχικής κατάτμησης, όπου και κατασκευάζεται μια κατάτμηση κ-δρόμων του μικρότερου γράφου (στο παράδειγμα της εικόνας μια κατάτμηση έχουμε 6-διαρόμων. Κατά την τρίτη φάση, ακολουθεί η διαδικασία της αποσυμπίκνωσης (*uncoarsening*) του γράφου, όπου η κατάτμηση βελτιστοποιείται (*refinement*) καθώς γίνεται προβολή σε μεγαλύτερο γράφο.



ΣΧΗΜΑ 5.1: Πολυεπίπεδη κατάτμηση

Ο βασικός στόχος της κατάτμησης είναι να ελαχιστοποιεί το *edgecut*. Ας θεωρήσουμε έναν γράφο $G = (V, E)$ και το διάνυσμα P , μεγέθους $|V|$, το οποίο φέρει την πληροφορία για το τμήμα στο οποίο ανήκει η κάθε κορυφή. Πιο συγκεκριμένα, η τιμή $P(i)$ είναι το αναγνωριστικό του τμήματος στο οποίο ανήκει η κορυφή i . Το *edgecut* αυτής της κατάτμησης ορίζεται ως το πλήθος των ακμών που γεφυρώνουν τα τμήματα, δηλαδή ο αριθμός των ακμών (u, v) για τις οποίες ισχύει $P(u) \neq P(v)$. Αν ο γράφος είναι βεβαρημένος τότε το *edgecut* ορίζεται ως το άθροισμα των βαρών των ακμών που γεφυρώνουν τα τμήματα.

$$\text{edgecut} = \sum_{(u,v) \in E, P(u) \neq P(v)} w(u, v) \quad (5.6)$$

Κατόπιν της κατάτμησης, επιλέγουμε να γεφυρώσουμε τα τμήματα i και j με την ακμή

$$e = \operatorname{argmin}_{e=(u,v): P(u)=i, P(v)=j} w(u, v) \quad (5.7)$$

Όπως φαίνεται και από την παραπάνω εξίσωση, η ακμή αυτή, είναι η ακμή ελαχίστου βάρους που συνδέει δύο γειτονικά τμήματα.

Κεφάλαιο 6

Αναδρομική Επίλυση Συστημάτων

6.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα εξετάσουμε τον αλγόριθμο των *Spielman* και *Teng* σχετικά με την αναδρομική επίλυση γραμμικών συστημάτων.

Όπως είδαμε μέχρι τώρα, σε κάθε βήμα της προρρυθμισμένης μεθόδου συζηγών κλίσεων επιλύεται ένα σύστημα του προρρυθμιστή κατάστασης. Μέχρι στιγμής το σύστημα αυτό επιλύεται με την χρήση άμεσης μεθόδου, μέσω παραγοντοποίησης *Cholesky*. Οι *Spielman* και *Teng* προτείνουν μια μέθοδο, όπου για την επίλυση του συστήματος του προρρυθμιστή κατάστασης, θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί η προρρυθμισμένη μέθοδος συζηγών κλίσεων.

6.2 Μερική παραγοντοποίηση *Cholesky*

Στόχος της μερικής παραγοντοποίησης *Cholesky* είναι να εξαλείψει γραμμές (ή ισοδύναμα στήλες, καθώς ο πίνακας είναι συμμετρικός) με ένα ή δύο μη-μηδενικά στοιχεία εκτός διαγωνίου. Οι γραμμές αυτές αντιπροσωπεύουν κόμβους που είναι ακροδέκτες ενός ή δύο κυκλωματικών στοιχείων.

Μέσω της διαδικασίας αυτής ο πίνακας B του *preconditioner* παραγοντοποιείται στην μορφή

$$B = PLCL^T P^T. \quad (6.1)$$

Ο πίνακας P είναι πίνακας μετάθεσης και χρησιμοποιείται για κατάλληλες εναλλαγές γραμμών και στηλών έτσι ώστε οι γραμμές με περισσότερα από δύο μη-μηδενικά στοιχεία εκτός

διαγωνίου να είναι οι τελευταίες του πίνακα, φροντίζοντας ωστόσο ο πίνακας να παραμένει συμμετρικός. Ο πίνακας L είναι ο κάτω τριγωνικός και ο πίνακας C έχει την μορφή

$$C = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

Υποθέτοντας ότι ο αρχικός πίνακας B έχει διάσταση $\dim\{B\} = n \times n$, και υπάρχουν n_1 γραμμές με περισσότερα από δύο μη μηδενικά στοιχεία εκτός διαγωνίου τότε ο πίνακας D έχει διάσταση $\dim\{D\} = (n - n_1) \times (n - n_1)$ και αντίστοιχα ο πίνακας A_1 έχει διάσταση $\dim\{A_1\} = n_1 \times n_1$.

6.3 Αλγόριθμος ενός επιπέδου

Ο αλγόριθμος αυτός είναι ουσιαστικά ένα εισαγωγικό βήμα προς την αναδρομική επίλυση. Θα δούμε πως μπορεί να επιλυθεί το το σύστημα ενός πίνακα B ο οποίος έχει παραγοντοποιηθεί με την μερική παραγοντοποίηση *Cholesky* σε $B = PLCL^TP^T$.

Στο σημείο αυτό ας σημειώσουμε ότι στην πράξη πολλαπλασιάζουμε τους πίνακες P και P^T με τον πίνακα B ώστε να σχηματίσουμε για το σύστημα $B\vec{z} = \vec{r}$, το ισοδύναμο $B'\vec{z} = \vec{r}'$. Ο πολλαπλασιασμός από αριστερά με τον P ουσιαστικά αλλάζει την σειρά των εξισώσεων, επηρεάζοντας τόσο τον πίνακα, όσο και το δεξί μέλος, ενώ ο πολλαπλασιασμός από δεξιά με τον P^T αλλάζει την σειρά με την οποία εμφανίζονται οι άγνωστοι μέσα στις εξισώσεις, επομένως αφήνει το δεξί μέλος ανεπηρέαστο.

Έτσι λοιπόν καλούμαστε να λύσουμε το σύστημα

$$L \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} L^T \vec{z} = \vec{r}' \quad (6.3)$$

Όπως και στις κλασικές παραγοντοποιήσεις επιλύουμε σταδιακά με χρήση ενδιάμεσων διανυσμάτων. Αρχικά, χρησιμοποιώντας εμπρόσθια αντικατάσταση για το σύστημα του πίνακα L , επιλύουμε το σύστημα

$$L\vec{z}_2 = \vec{r}' \quad (6.4)$$

Έπειτα επιλύουμε το σύστημα

$$\begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} \vec{z}_1 = \vec{z}_2 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{z}_{1u} \\ \vec{z}_{1l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{z}_{2u} \\ \vec{z}_{2l} \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

Καθώς το σύστημα αναλύεται σε δύο ανεξάρτητα συστήματα, μπορούμε να λύσουμε και ανεξάρτητα χρησιμοποιώντας άμεσες μεθόδους. Ο πίνακας D είναι διαγώνιος και επομένως το σύστημα $Dz_{1u} = z_{2u}$ μπορεί να λυθεί πολύ απλά, αφού κάθε στοιχείο του διανύσματος αποτελέσματος είναι:

$$z_{1u}(i) = \frac{z_{2u}(i)}{D(i, i)}. \quad (6.6)$$

Επίσης, για την επίλυση του συστήματος του πίνακα A_1 μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την παραγοντοποίηση *Cholesky* εφόσον ο πίνακας A_1 είναι και αυτός συμμετρικός και θετικά ορισμένος.

Τέλος, για την εύρεση της τελικής λύσης, επιλύουμε το σύστημα του πίνακα L^T με οπίσθια αντικατάσταση.

$$L^T \vec{z} = \vec{z}_2 \quad (6.7)$$

Η επίλυση του συστήματος με αυτόν τον τρόπο μας εισάγει ενός ιδέα ενός αναδρομικού επιλυτή, καθώς μπορούμε για την επίλυση συστήματος του πίνακα A_1 μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ξανά την προρυθμισμένη μέθοδο συζυγών κλίσεων με χρήση κατάλληλου προρυθμιστή κατάστασης.

6.4 Ο αναδρομικός επιλυτής

Ο αλγόριθμος για την αναδρομική επίλυση του συστήματος του προρυθμιστή κατάστασης που σχεδίασαν οι *Spielman* και *Teng* ξεκινά υπολογίζοντας ένα προρυθμιστή κατάστασης B , για τον πίνακα A μέσω της διαδικασίας εξαγωγής ενός επαυξημένου επικαλύπτοντος δέντρου.

Στην συνέχεια χρησιμοποιώντας μερική παραγοντοποίηση *Cholesky* παραγοντοποιεί τον πίνακα B με την μερική παραγοντοποίηση *Cholesky* ως:

$$B = PL \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} L^T P^T. \quad (6.8)$$

Όπως είδαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο, λόγω του ισομορφισμού μεταξύ Λαπλασιανών πινάκων και βεβαρημένων γράφων μπορούμε να συσχετίσουμε τον πίνακα A_1 με ένα γράφο $G_1 = (V_1, E_1, w_1)$, και να εξάγουμε ένα επαυξημένο επικαλύπτον δέντρο ως προρυθμιστή κατάστασης B_1 ώστε να επιλύσουμε αυτό το σύστημα χρησιμοποιώντας την προρυθμισμένη μέθοδο συζυγών κλίσεων.

Έπειτα, αν κάνουμε μερική παραγοντοποίηση *Cholesky* στον B_1 θα καταλήξουμε ξανά σε ένα σύστημα μικρότερης τάξης A_2 . Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται έως ότου καταλήξουμε

σε έναν πίνακα A_k του οποίου η διάσταση είναι μικρότερη από από ένα κατώφλι (*threshold*). Ένας τέτοιος πίνακας είναι αρκετά μικρός ώστε να μπορούμε να τον επιλύσουμε με μία άμεση μέθοδο, που στην περίπτωσή μας θα είναι η παραγοντοποίηση *Cholesky*.

Φυσικά, όλοι οι απαραίτητοι προρυθμιστές κατάστασης και οι αντίστοιχες παραγοντοποιήσεις αυτών υπολογίζονται μία φορά πρώτου ξεκινήσει η επίλυση του γραμμικού συστήματος.

Οι *Spielman* και *Teng* στηρίζουν τον αναδρομικό επιλυτή πάνω στον αλγόριθμο τους για την επαύξηση επικαλύπτοντων δέντρων. Εν τούτοις, άνευ βλάβης της γενικότητας, η ιδέα αυτή μπορεί να επεκταθεί σε οποιονδήποτε ντετερμινιστικό αλγόριθμο επαύξης δέντρων.

Κεφάλαιο 7

Πειραματική Διαδικασία και Αποτελέσματα

7.1 Περιγραφή της Πειραματικής Διαδικασίας

Η πειραματική διαδικασία συνίσταται στην εφαρμογή των αλγορίθμων εξαγωγής των προ-ρυθμιστών κατάστασης σε πραγματικά κυκλώματα και κατόπιν στην εφαρμογή του προ-ρυθμιστή κατάσταση για την επίλυση του γραμμικού συστήματος που προκύπτει από την τροποποιημένη ανάλυση κόμβων.

Τα πραγματικά κυκλώματα που θα μελετήσουμε είναι τα δίκτυα τροφοδοσίας των ολοκληρωμένων κυκλωμάτων της IBM. Τα κυκλώματα αυτά έχουν μια ιδιαίτερη τοπολογία και ως εκ τούτου απαιτούν προεργασία προκειμένου να εφαρμοστούν αποτελεσματικά οι αλγόριθμοι που περιγράψαμε.

Καθώς τα δίκτυα τροφοδοσίας ολοκληρωμένων κυκλωμάτων περιγράφουν μια τριδιάστατη γεωμετρία όπου κόμβοι που ανήκουν σε διαφορετικά επίπεδα μετάλλου συνδέονται μεταξύ τους με ανεξάρτητες πηγές τάσης, τιμής $V_{vias} = 0\text{ V}$. Κόμβοι που συνδέονται μια τέτοια πηγή τάσης μηδινικής τιμής, ουσιαστικά μπορούν να συμπτυχθούν και να σχηματίσουν έναν υπερ-κόμβο. Εφαρμόζοντας αυτή την διαδικασία λαμβάνουμε τις επιμέρους κυκλωματικές τοπολογίες του αρχικού κυκλώματος.

Τέλος, οι αλγόριθμοι που περιγράψαμε απαιτούν έναν συνδεδεμένο γράφο. Επομένως, φροντίζουμε να απομονώσουμε ένα κομμάτι του κυκλώματος το οποίο είναι ένα συνδεδεμένος γράφος ως προς του ηλεκτρικούς αντιστάτες.

Αφού εφαρμόσουμε τους αλγόριθμους που περιγράψαμε πάνω στον κυκλωματικό γράφο και εξάγουμε τον προρυθμιστή κατάστασης, το επόμενο βήμα είναι η αξιολόγηση της ποιότητας του όταν εφαρμοστεί για προρύθμιση της μεθόδου συζηγών κλίσεων.

Χρησιμοποιώντας το εργαλείο *MATLAB*, το οποίο είναι εγγενώς προσανατολισμένο για μαθηματικούς υπολογισμούς και πράξεις πινάκων, εκτελούμε για κάθε προρυθμιστή κατάσταση, την μέθοδο συζυγών κλίσεων για μια σειρά τυχαίων διανυσμάτων δεξιού μέλους και παρατηρούμε κατά μέσο όρο, τα βήματα και τον χρόνο, που απαιτούνται για να επιτευχθεί σύγκλιση. Ως μέτρο σύγκρισης έχουμε τις ίδιες ποσότητες που προκύπτουν όταν η μέθοδος συζυγών κλίσεων προρυθμίζεται με τον πιο αποδοτικό προρυθμιστή κατάστασης γενικού σκοπού που παρέχει το *MATLAB*, την ημιτελή παραγοντοποίηση *Cholesky*.

7.2 Ανάλυση της Πυκνότητας Γράφους

Αναφέραμε σε προηγούμενο κεφάλαιο ότι η υλοποίηση μας στοχεύει κυρίως σε προρύθμιση κατάστασης αραιών πινάκων και κατ' επέκταση οι αλγόριθμοι επεξεργάζονται αραιούς γράφους.

Η έννοια του αραιού πίνακα έρχεται να συμπληρωθεί στην παράγραφο αυτή την έννοια της πυκνότητας γράφου.

Καθώς υπάρχει ισομορφισμός ανάμεσα στους γράφους και στους Λαπλασιανούς πίνακες, μπορούμε να εξάγουμε χρήσιμες πληροφορίες για τα κυκλώματα, μελετώντας τον γράφο του κυκλωματικού Λαπλασιανού πίνακα.

7.2.1 Πυκνότητα γράφου

Η πυκνότητα ενός μη-κατευθυνόμενου γράφου ορίζεται ως:

$$den(G) = \frac{2|E|}{|V|(|V| - 1)} \quad (7.1)$$

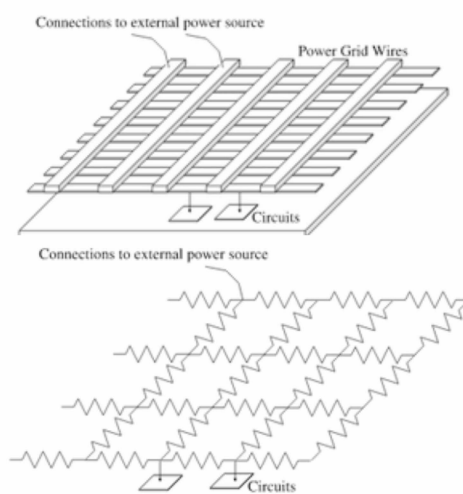
Ένα πλήρες μη-κατευθυνόμενο γράφημα έχει ακριβώς $|V|(|V| - 1)/2$ ακμές και επομένως η μέγιστη πυκνότητα θα είναι:

$$den(G_{fc}) = \frac{2|E|}{|V|(|V| - 1)} = \frac{2 \frac{|V|(|V|-1)}{2}}{|V|(|V| - 1)} = 1 \quad (7.2)$$

Προφανώς, καθώς η πυκνότητα του γράφου είναι αδιάστατο μέγεθος, μπορούμε να την εκφράζουμε ποσοστιαία. Έτσι λοιπόν, η πυκνότητα για ένα πλήρες γράφημα, ορίζεται να είναι $den(G_{fc}) = 100\%$.

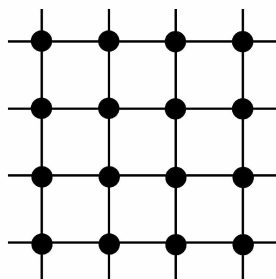
7.2.2 Διάταξεις πλέγματος

Στην υποπαράγραφο αυτή θα μελετήσουμε πως κλιμακώνεται η πυκνότητα σε γράφους που έχουν διάταξη πλέγματος. Τέτοιοι γράφοι προκύπτουν συνήθως από την τοπολογία των δικτύων τροφοδοσίας ολοκληρωμένων κυκλωμάτων. Η απεικόνιση ενός δικτύου τροφοδοσίας ολοκληρωμένου κυκλώματος παρουσιάζεται στο σχήμα ;;



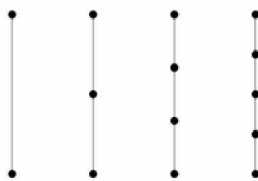
ΣΧΗΜΑ 7.1: Δίκτυο τροφοδοσίας ολοκληρωμένου κυκλώματος

Μαθηματικά, ένα δυδιάστατος γράφος πλέγματος ορίζεται ως ο mn γράφος πλέγματος $G_{m,n}$ που προκύπτει από το καρτεσιανό γινόμενο $P_m \times P_n$ των γράφων μονοπατιών με m και n κορυφές αντίστοιχα.



ΣΧΗΜΑ 7.2: Γράφος πλέγματος

Ως γράφος μονοπατιού P_n είναι ένα δέντρο με n κορυφές, όπου 2 κορυφές γειτνιάζουν με μία κορυφή, ενώ οι υπόλοιπες $n - 2$ κορυφές, γειτνιάζουν με δύο κορυφές. Ένας γράφος μονοπάτι μπορεί επομένως να σχεδιαστεί, έτσι ώστε όλες οι κορυφές και οι ακμές του να βρίσκονται σε μία ευθεία γραμμή.



ΣΧΗΜΑ 7.3: Γράφος μονοπατιού

Προκύπτει άμεσα πως ο γράφος πλέγματος $G(m, n)$ έχει mn κορυφές και $(m-1)n + (n-1)m = 2mn - m - n$ ακμές. Επομένως, για έναν τετράγωνο γράφο πλέγματος $G = G_{n,n}$ θα ισχύει $|V| = n^2$ και $|E| = 2n^2 - 2n$ και άρα η πυκνότητα ενός τέτοιου γράφου θα είναι:

$$\text{den}(G) = \frac{2|E|}{|V|(|V| - 1)} = \frac{2(2n^2 - 2n)}{n^2(n^2 - 1)} = \frac{4}{n^2 + n} = \frac{4}{|V| + \sqrt{|V|}} \quad (7.3)$$

Στον πίνακα 7.1, παραθέτουμε ενδεικτικά τις βασικές πληροφορίες των γράφων, των τμημάτων των δικτύων τροφοδοσίας ολοκληρωμένων κυκλωμάτων της IBM, που θα αναλύσουμε στις επόμενες παραγράφους

| Πληροφορίες κυκλωματικού γράφου | | | |
|---------------------------------|-----------------|---------------|------------------|
| Κυκλωματική διάταξη | Αριθμός κορυφών | Αριθμός ακμών | Πυκνότητα γράφου |
| <i>pg1-vdd-net-0</i> | 1,535 | 2,737 | $2.32472e-3$ |
| <i>pg2-vdd-net-0</i> | 61,677 | 101,598 | $5.34165e-5$ |
| <i>pg6-vdd-net</i> | 403,915 | 797,233 | $9.77319e-6$ |

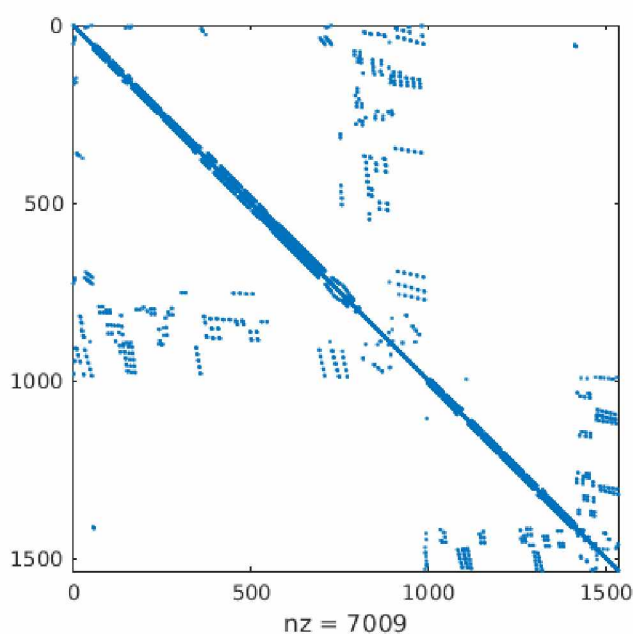
ΠΙΝΑΚΑΣ 7.1: Πληροφορίες κυκλωματικών γράφων δικτύων τροφοδοσίας

Όπως ήδη προαναφέραμε, από κυκλωματικές διατάξεις πλέγματος προκύπτουν εξαιρετικά αραιοί γράφοι.

7.3 Δίκτυο τροφοδοσίας 1

Το πρώτο πείραμα που μελετάμε έχει προκύψει από ένα, συνδεδεμένο ως προς τους ηλεκτρικούς αντιστάτες τμήμα, του πρώτου δικτύου τροφοδοσίας της IBM.

Στην εικόνα 7.4 παρατηρούμε την δομή του αραιού πίνακα. Σημειώνουμε ότι η διάσταση του πίνακα είναι 1535×1535 . Αν ο γράφος αυτού του πίνακα ήταν ένα τετράγωνο πλέγμα θα είχε πυκνότητα $2.541e-3$ η οποία είναι ελαφρώς μεγαλύτερη από την πραγματική τιμή $2.324e-3$ που υπολογίσαμε.



ΣΧΗΜΑ 7.4: Αραιός πίνακας δικτύου τροφοδοσίας 1

Στον πίνακα 7.2 παρατηρούμε αναλυτικά την επίδοση των προορυθμιστών κατάσταση από τα επικαλύπτοντα δέντρα που περιγράψαμε. Η υψηλότερη είναι του ελάχιστου επικαλύπτοντος δέντρου, ενώ η χαμηλότερη είναι αυτή του επικαλύπτοντος δέντρου χαμηλής έκτασης. Η βελτίωση του ελάχιστου επικαλύπτοντος δέντρου, σε σχέση με την ατελή παραγοντοποίηση *Cholesky* είναι 3.25 ως προς τις επαναλήψεις και 2.5 ως προς τον χρόνο εκτέλεσης.

| Δίκτυο τροφοδοσίας 1: Επικαλύπτοντα δέντρα | | | |
|--|-----------------------|------------------------------|-----------------|
| Μετρικές | Ελάχιστο επικ. δέντρο | Επικ. δέντρο χαμηλής έκτασης | Υβριδικό δέντρο |
| Επαναλήψεις | 39 | 89 | 40 |
| Χρόνος εκτέλεσης | 0.0667 | 0.110409 | 0.047872 |

ΠΙΝΑΚΑΣ 7.2: Επίδοση επικ. δέντρων στο δίκτυο τροφοδοσίας 1

Στον πίνακα 7.3, παρατηρούμε αναλυτικά την επίδοση των προορυθμιστών κατάσταση που προκύπτουν από την επαύξηση των επικαλύπτοντων δέντρων βάσει την έκταση των ακμών.

Παρατηρούμε πως η επίδοση βελτιώνεται για όλα τα δέντρα. Την καλύτερη επίδοση επιτυγχάνει το επαυξημένο (ως προς την έκταση) υβριδικό δέντρο με βελτίωση 3.849 ως προς τις επαναλήψεις και 3.924 ως προς τον χρόνο εκτέλεσης.

Τέλος, στον πίνακα 7.4 παρατηρούμε αναλυτικά την επίδοση των προορυθμιστών κατάσταση που προκύπτουν από την επαύξηση των επικαλύπτοντων δέντρων βάσει την βάρος των ακμών.

| Δίκτυο τροφοδοσίας 1: Επαύξηση με βάση την έκταση των ακμών | | | |
|---|-----------------------|------------------------------|-----------------|
| Μετρικές | Ελάχιστο επικ. δέντρο | Επικ. δέντρο χαμηλής έκτασης | Υβριδικό δέντρο |
| Επαναλήψεις | 34 | 77 | 33 |
| Χρόνος εκτέλεσης | 0.044951 | 0.072877 | 0.0728772 |

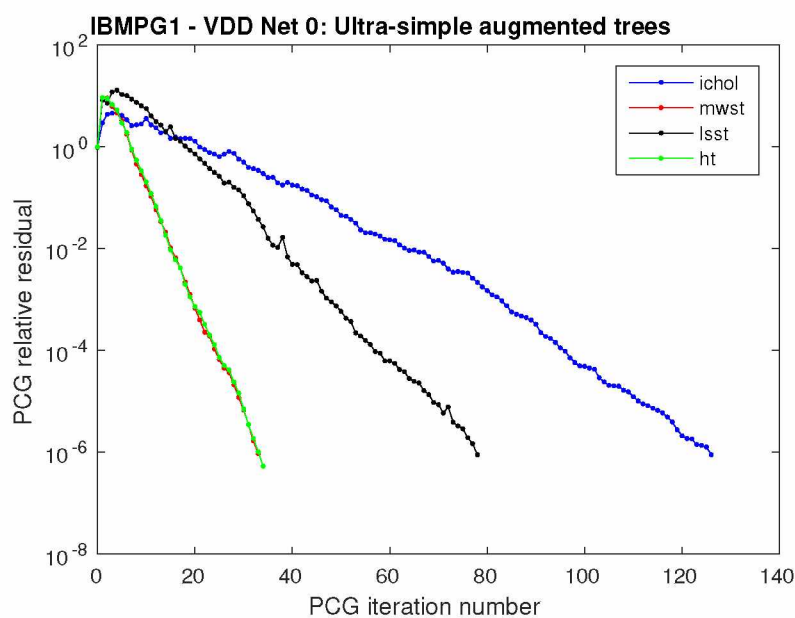
ΠΙΝΑΚΑΣ 7.3: Επίδοση επαυξ. ως προς την έκταση δέντρων στο δίκτυο τροφοδοσίας 1

Παρατηρούμε πως και πάλι η επίδοση βελτιώνεται για όλα τα δέντρα. Την καλύτερη επίδοση επιτυγχάνει και το επαυξημένο (ως προς το βάρος) υβριδικό δέντρο με βελτίωση 3.735 ως προς τις επαναλήψεις και 3.554 ως προς τον χρόνο εκτέλεσης.

| Δίκτυο τροφοδοσίας 1: Επαύξηση με βάση το βάρος των ακμών | | | |
|---|-----------------------|------------------------------|-----------------|
| Μετρικές | Ελάχιστο επικ. δέντρο | Επικ. δέντρο χαμηλής έκτασης | Υβριδικό δέντρο |
| Επαναλήψεις | 34 | 78 | 34 |
| Χρόνος εκτέλεσης | 0.052897 | 0.073094 | 0.047118 |

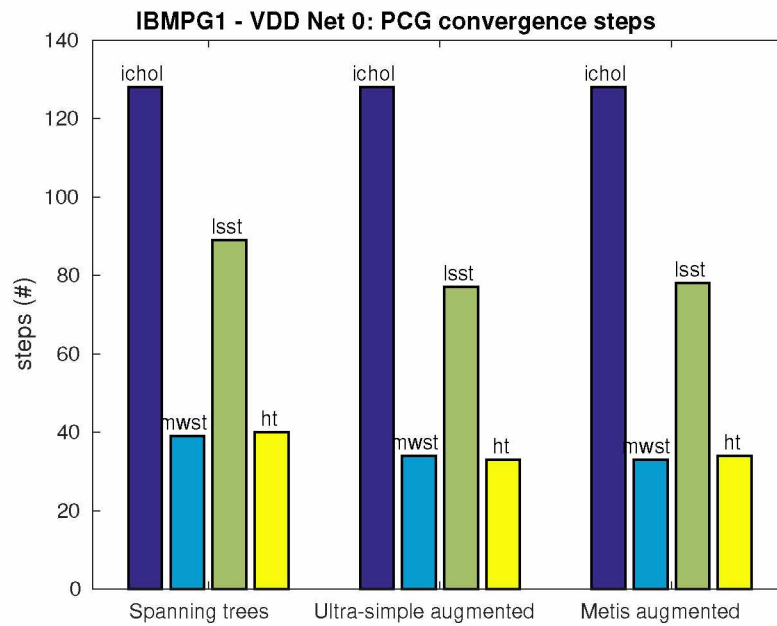
ΠΙΝΑΚΑΣ 7.4: Επίδοση επαυξ. ως προς την βάρος δέντρων στο δίκτυο τροφοδοσίας 1

Στο σχήμα 7.5 παρατηρούμε πως μειώνεται το υπόλοιπο σε κάθε βήμα και γι' αυτό οδηγείται σε σύγκλιση.

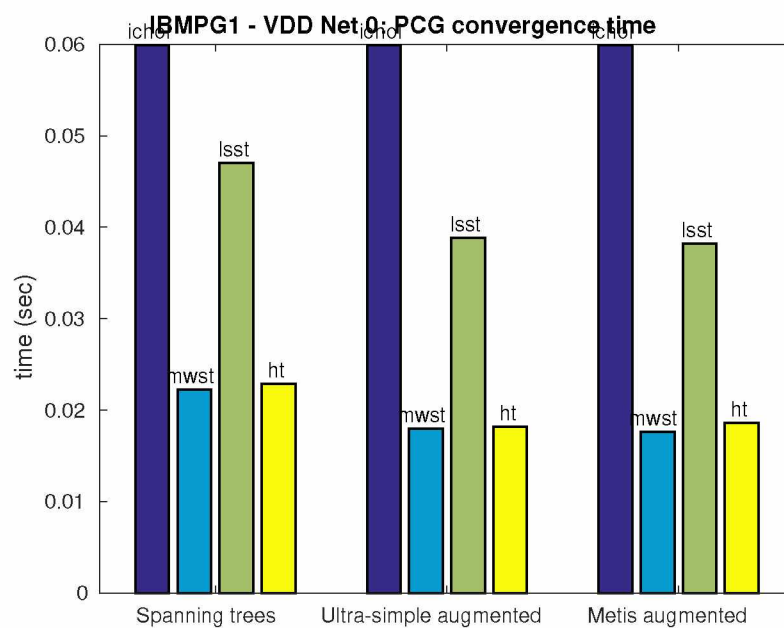


ΣΧΗΜΑ 7.5: Σχετικό υπόλοιπο σύγκλισης δικτύου τροφοδοσίας 1

Στο σχήματα 7.6 και 7.7 έχουμε μια ποιοτική απεικόνιση για τον αριθμό επαναλήψεων και τον χρόνο εκτέλεσης αντίστοιχα, που απαιτεί η μέθοδος για να συγκλίνει, ανάλογα με τον κάθε προοιμιακή κατάσταση.



ΣΧΗΜΑ 7.6: Σύγκριση βημάτων σύγκλισης δικτύου τροφοδοσίας 1

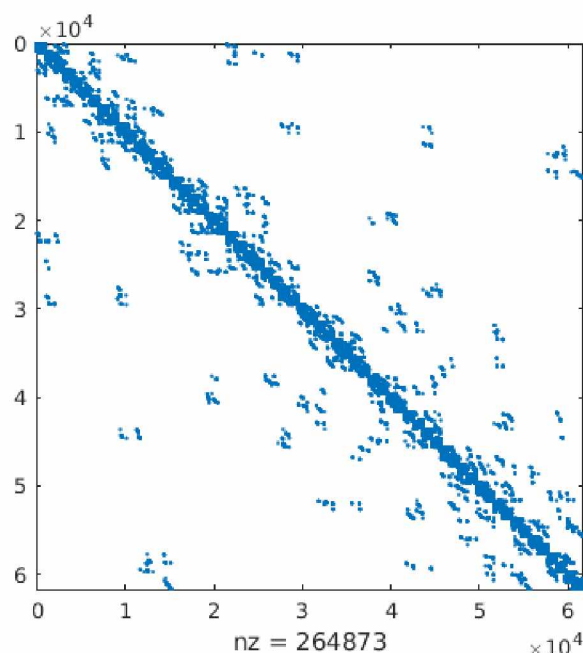


ΣΧΗΜΑ 7.7: Σύγκριση χρόνου σύγκλισης δικτύου τροφοδοσίας 1

7.4 Δίκτυο τροφοδοσίας 2

Το επόμενο πείραμα έχει επίσης προκύψει από ένα, συνδεδεμένο ως προς τους ηλεκτρικούς αντιστάτες τμήμα, του δεύτερου δικτύου τροφοδοσίας της IBM.

Στην εικόνα 7.8 παρατηρούμε την δομή του αραιού πίνακα. Σημειώνουμε ότι η διάσταση του πίνακα είναι $61,667 \times 61,667$. Αν ο γράφος αυτού του πίνακα ήταν ένα τετράγωνο πλέγμα θα είχε πυκνότητα $6.46e-6$. Η τιμή που υπολογίσαμε είναι $5.34165e-5$, η οποία είναι κατά μία τάξη μεγέθους μεγαλύτερη.



ΣΧΗΜΑ 7.8: Αραιός πίνακας δικτύου τροφοδοσίας 2

Στον πίνακα 7.5 παρατηρούμε αναλυτικά την επίδοση των προορυθμιστών κατάστασης επικαλύπτοντων δέντρων. Η υψηλότερη, του υβριδικού δέντρου, είναι 1.632 ως προς τις επαναλήψεις και 1.705 ως προς τον χρόνο εκτέλεσης.

| Δίκτυο τροφοδοσίας 2: Επικαλύπτοντα δέντρα | | | |
|--|-----------------------|------------------------------|-----------------|
| Μετρικές | Ελάχιστο επικ. δέντρο | Επικ. δέντρο χαμηλής έκτασης | Υβριδικό δέντρο |
| Επαναλήψεις | 107 | 270 | 106 |
| Χρόνος εκτέλεσης | 1.831134 | 5.699056 | 1.785685 |

ΠΙΝΑΚΑΣ 7.5: Επίδοση επικ. δέντρων στο δίκτυο τροφοδοσίας 2

Στον πίνακα 7.6, παρατηρούμε αναλυτικά την επίδοση των προορυθμιστών κατάσταση που προκύπτουν από την επαύξηση των επικαλύπτοντων δέντρων βάσει την έκταση των ακμών.

Παρατηρούμε πως η επίδοση βελτιώνεται για όλα τα δέντρα. Την καλύτερη επίδοση ως προς τις επαναλήψεις επιτυγχάνει το επαξημένο (ως προς την έκταση) υβριδικό δέντρο με βελτίωση 1.765, ενώ ως προς τον χρόνο εκτέλεσης, την καλύτερη επίδοση επιτυγχάνει το επαξημένο (ως προς την έκταση) ελάχιστο δέντρο με βελτίωση 1.888

| Δίκτυο τροφοδοσίας 2: Επαύξηση με βάση την έκταση των ακμών | | | |
|---|-----------------------|------------------------------|-----------------|
| Μετρικές | Ελάχιστο επικ. δέντρο | Επικ. δέντρο χαμηλής έκτασης | Υβριδικό δέντρο |
| Επαναλήψεις | 100 | 237 | 98 |
| Χρόνος εκτέλεσης | 1.611759 | 5.529661 | 1.785685 |

ΠΙΝΑΚΑΣ 7.6: Επίδοση επαυξ. ως προς την έκταση δέντρων στο δίκτυο τροφοδοσίας 2

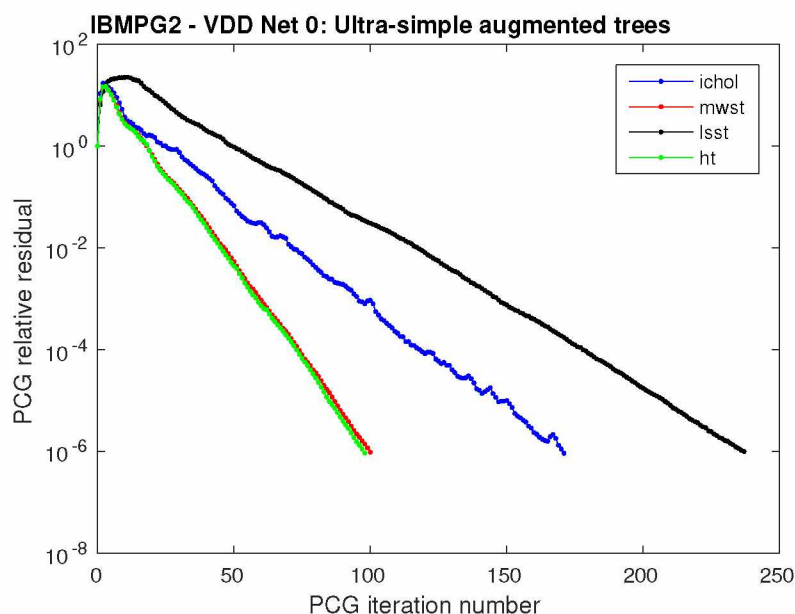
Τέλος, στον πίνακα 7.7 παρατηρούμε αναλυτικά την επίδοση των προοιμιστών κατάσταση που προκύπτουν από την επαύξηση των επικαλύπτοντων δέντρων βάσει του βάρους των ακμών.

Παρατηρούμε πως και πάλι η επίδοση βελτιώνεται για όλα τα δέντρα. Την καλύτερη επίδοση επιτυγχάνει και το επαυξημένο (ως προς το βάρος) υβριδικό δέντρο με βελτίωση 1.765 ως προς τις επαναλήψεις και 1.817 ως προς τον χρόνο εκτέλεσης.

| Δίκτυο τροφοδοσίας 2: Επαύξηση με βάση το βάρος των ακμών | | | |
|---|-----------------------|------------------------------|-----------------|
| Μετρικές | Ελάχιστο επικ. δέντρο | Επικ. δέντρο χαμηλής έκτασης | Υβριδικό δέντρο |
| Επαναλήψεις | 100 | 237 | 98 |
| Χρόνος εκτέλεσης | 1.679060 | 5.498693 | 1.674731 |

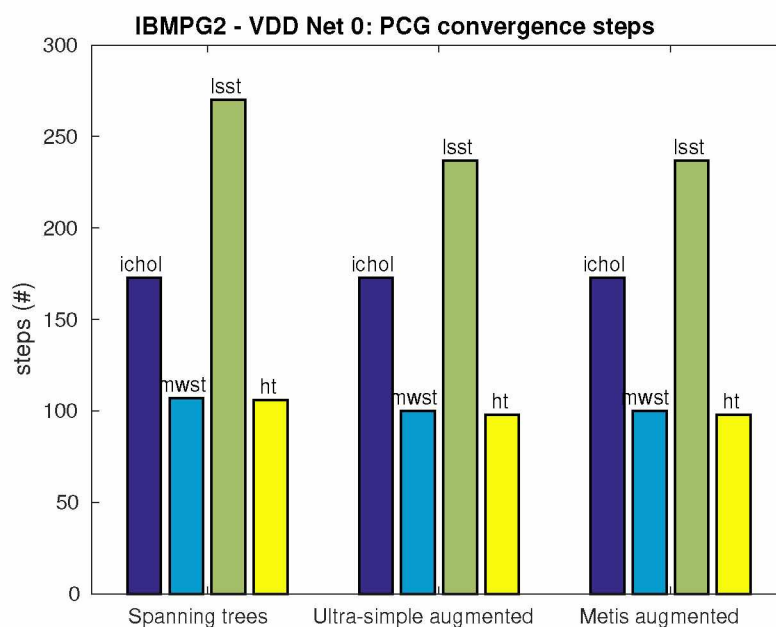
ΠΙΝΑΚΑΣ 7.7: Επίδοση επαυξ. ως προς το βάρος δέντρων στο δίκτυο τροφοδοσίας 2

Στο σχήμα 7.9 παρατηρούμε πως μειώνεται το υπόλοιπο σε κάθε βήμα της μεθόδου.

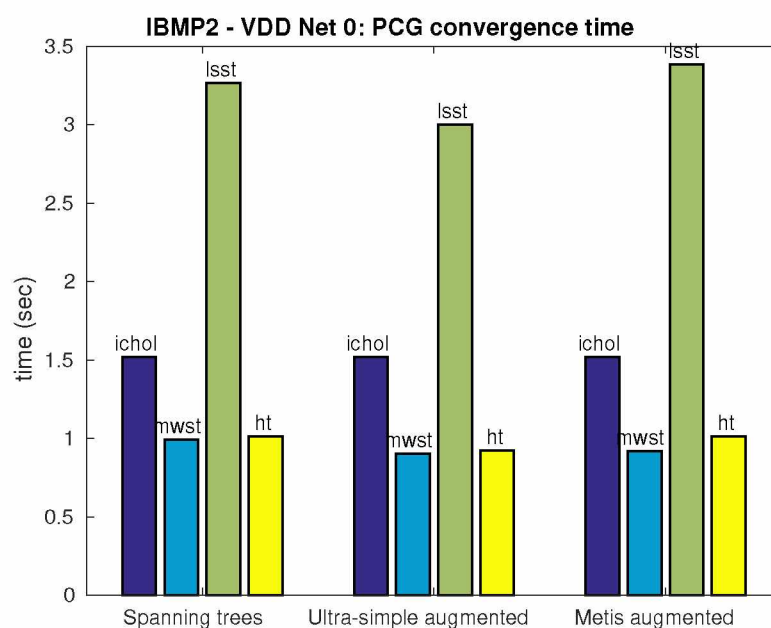


ΣΧΗΜΑ 7.9: Σχετικό υπόλοιπο σύγκλισης δικτύου τροφοδοσίας 2

Στα σχήματα 7.10 και 7.11 έχουμε μια ποιοτική απεικόνιση για τον αριθμό επαναλήψεων και τον χρόνο εκτέλεσης αντίστοιχα, που απαιτεί η μέθοδος για να συγκλίνει, ανάλογα με τον κάθε προοιμιστή κατάσταση.



ΣΧΗΜΑ 7.10: Σύγκριση χρόνου σύγκλισης δικτύου τροφοδοσίας 2

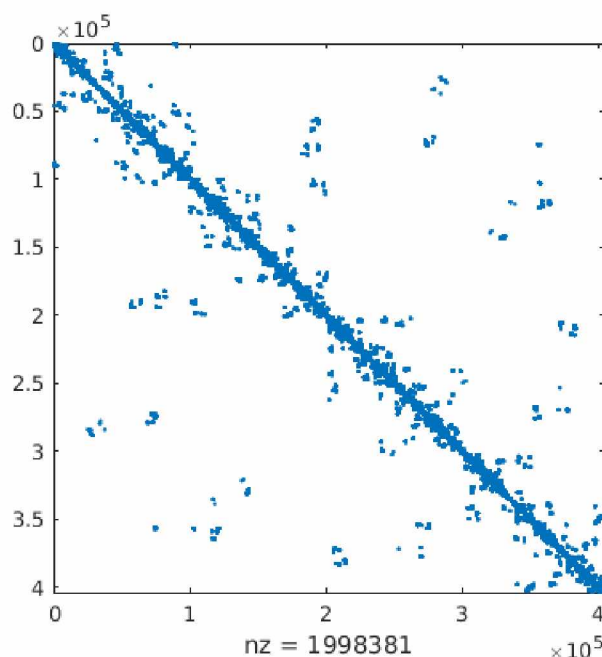


ΣΧΗΜΑ 7.11: Σύγκριση χρόνου σύγκλισης δικτύου τροφοδοσίας 2

7.5 Δίκτυο τροφοδοσίας 6

Το επόμενο πείραμα έχει επίσης προκύψει έκτο δίκτυο τροφοδοσίας ολοκληρωμένων κυκλωμάτων της IBM.

Στην εικόνα 7.12 παρατηρούμε την δομή του αραιού πίνακα. Σημειώνουμε ότι η διάσταση του πίνακα είναι $403,915 \times 403,915$. Αν ο γράφος αυτού του πίνακα ήταν ένα τετράγωνο πλέγμα θα είχε πυκνότητα $9.887e - 6$. Η τιμή που υπολογίσαμε είναι $9.773 - 6$, η οποία πολύ κοντά στην προβλεπόμενη τιμή.



ΣΧΗΜΑ 7.12: Αραιός πίνακας δικτύου τροφοδοσίας 6

Αρχικά, παρατηρούμε στον πίνακα 7.8 αναλυτικά την επίδοση των προορυθμιστών κατάστασης επικαλύπτοντων δέντρων. Σε αυτή την περίπτωση τα δέντρα δεν βελτιώνουν τα βήματα ή τον χρόνο σύγκλισης σε σχέση με την ατελή παραγοντοποίηση *Cholesky*. Την καλύτερη επίδοση ωστόσο, παρουσιάζει το υβριδικό δέντρο.

| Δίκτυο τροφοδοσίας 6: Επικαλύπτοντα δέντρα | | | |
|--|-----------------------|------------------------------|-----------------|
| Μετρικές | Ελάχιστο επικ. δέντρο | Επικ. δέντρο χαμηλής έκτασης | Υβριδικό δέντρο |
| Επαναλήψεις | 728 | 1037 | 727 |
| Χρόνος εκτέλεσης | 58.004 | 103.353 | 59.168 |

ΠΙΝΑΚΑΣ 7.8: Επίδοση επικ. δέντρων στο δίκτυο τροφοδοσίας 6

Στον πίνακα 7.9, παρατηρούμε αναλυτικά την επίδοση των προορυθμιστών κατάσταση που προκύπτουν από την επαύξηση των επικαλύπτοντων δέντρων βάσει την έκταση των ακμών.

Παρατηρούμε πως η επίδοση βελτιώνεται για όλα τα δέντρα. Την καλύτερη επίδοση ως προς τις επαναλήψεις επιτυγχάνει το επαυξημένο (ως προς την έκταση) υβριδικό δέντρο με βελτίωση 1.067.

| Δίκτυο τροφοδοσίας 6: Επαύξηση με βάση την έκταση των ακμών | | | |
|---|-----------------------|------------------------------|-----------------|
| Μετρικές | Ελάχιστο επικ. δέντρο | Επικ. δέντρο χαμηλής έκτασης | Υβριδικό δέντρο |
| Επαναλήψεις | 515 | 844 | 502 |
| Χρόνος εκτέλεσης | 41.976 | 83.056 | 43.476 |

ΠΙΝΑΚΑΣ 7.9: Επίδοση επαυξ. ως προς την έκταση δέντρων στο δίκτυο τροφοδοσίας 2

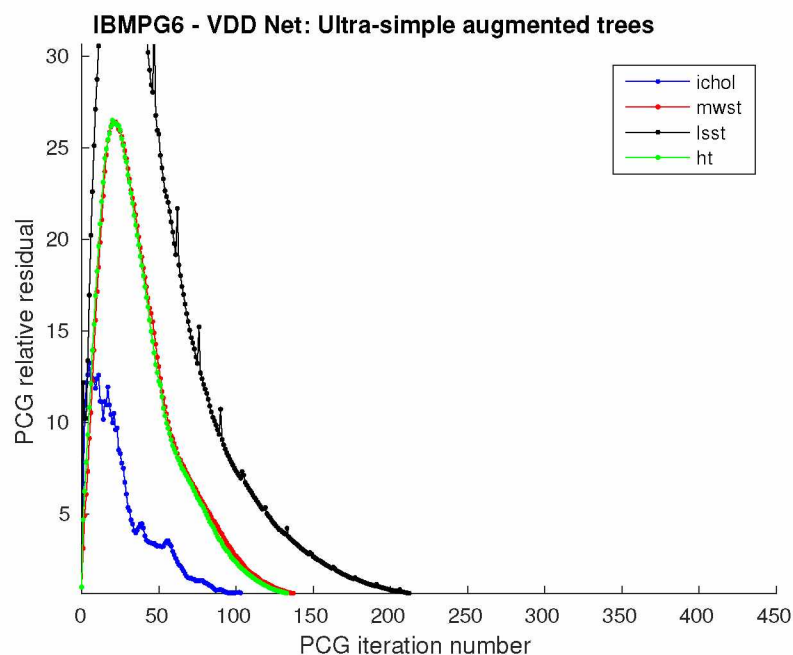
Τέλος, στον πίνακα παρατηρούμε αναλυτικά την επίδοση των προορυθμιστών κατάσταση που προκύπτουν από την επαύξηση των επικαλύπτοντων δέντρων βάση την βάρους των ακμών.

Παρατηρούμε πως και πάλι η επίδοση βελτιώνεται για όλα τα δέντρα. Την καλύτερη επίδοση επιτυγχάνει και το επαυξημένο (ως προς το βάρος) υβριδικό δέντρο με βελτίωση 1.067.

| Δίκτυο τροφοδοσίας 6: Επαύξηση με βάση το βάρος των ακμών | | | |
|---|-----------------------|------------------------------|-----------------|
| Μετρικές επίδοσης | Ελάχιστο επικ. δέντρο | Επικ. δέντρο χαμηλής έκτασης | Υβριδικό δέντρο |
| Επαναλήψεις | 515 | 844 | 502 |
| Χρόνος εκτέλεσης | 43.420 | 90.112 | 45.280 |

ΠΙΝΑΚΑΣ 7.10: Επίδοση επαυξ. ως προς το βάρος στο δίκτυο τροφοδοσίας 2

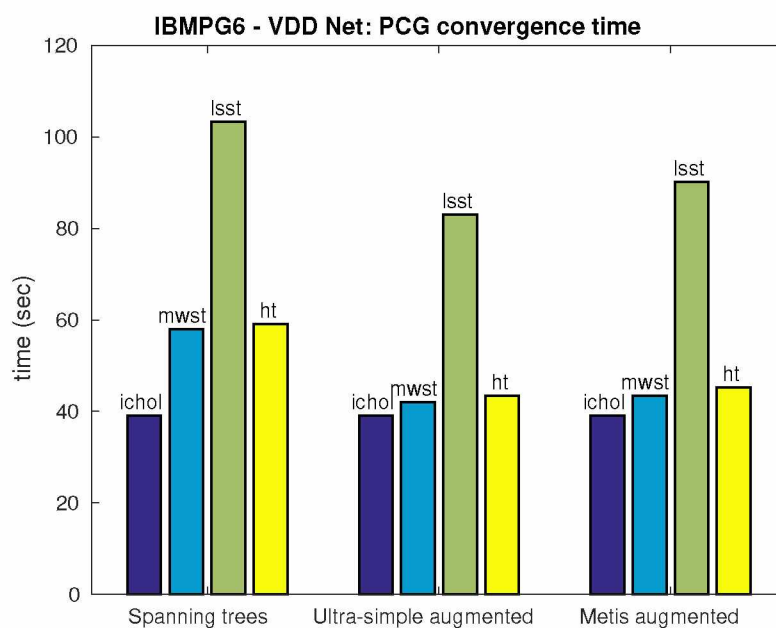
Στο σχήμα 7.13 παρατηρούμε πως μειώνεται το υπόλοιπο σε κάθε βήμα και η μέθοδος οδηγείται σε σύγκλιση.



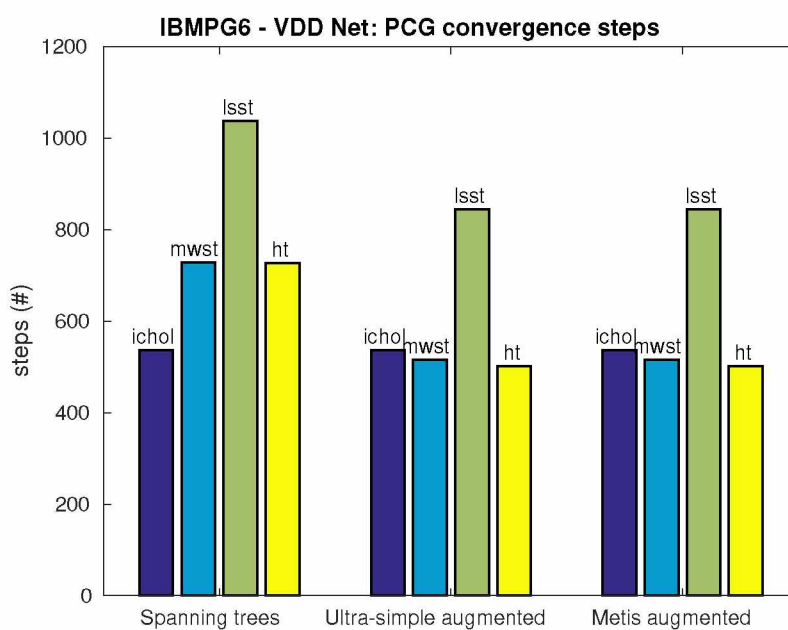
ΣΧΗΜΑ 7.13: Σχετικό υπόλοιπο σύγκλισης δικτύου τροφοδοσίας 6

Εύκολα παρατηρούμε πως οι προορυθμιστές κατάστασης υποστηρικτικού γράφου, παρουσιάζουν μια αστάθεια στις αρχικές επαναλήψεις, καθώς το υπόλοιπο αυξάνεται.

Ακολουθούν τα σχήματα 7.15 και 7.14 όπου παρουσιάζουν την ποιοτική απεικόνιση για τον αριθμό επαναλήψεων και τον χρόνο εκτέλεσης αντίστοιχα, που απαιτεί η μέθοδος για να συγκλίνει, ανάλογα με τον κάθε προρυθμιστή κατάστασης.



ΣΧΗΜΑ 7.14: Σύγκριση χρόνου σύγκλισης δικτύου τροφοδοσίας 6



ΣΧΗΜΑ 7.15: Σύγκριση βημάτων σύγκλισης δικτύου τροφοδοσίας 6

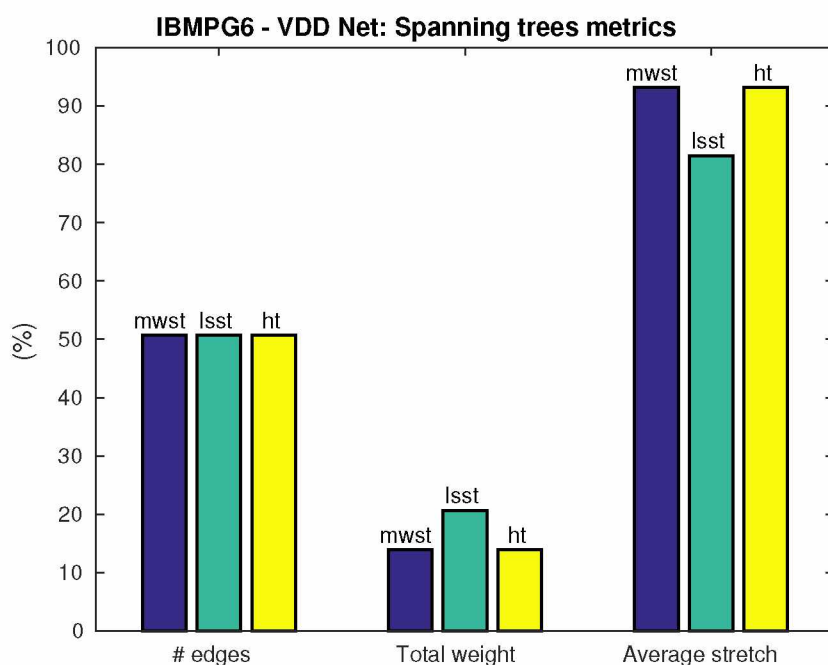
7.6 Ερμηνεία των αποτελεσμάτων

7.6.1 Επίδοση Επικαλύπτοντων Δέντρων

Είναι φανερό από πως από τους προοιθμιστές κατάστασης επικαλύπτοντων δέντρων, την μικρότερη επίδοση παρουσιάζει το επικαλύπτον δέντρο χαμηλής έκτασης.

Το γεγονός αυτό έγγυται στην φύση του αλγορίθμου κατασκευής, ο οποίος, όπως είδαμε, επιχειρεί αναδρομικές κατατμήσεις στον γράφο. Κατά την συνεχόμενη αναδρομική κατάτμηση, ο αλγόριθμος προσθέτει ακμές, φροντίζοντας η έκταση του δέντρου που κατασκευάζεται να παραμένει χαμηλή, χωρίς να λαμβάνεται υπόψιν το βάρος της ακμής, δηλαδή εμμέσως, η αγωγιμότητα της.

Παρατηρώντας το σχήμα 7.16, στο οποίο παραθέτουμε κάποιες μετρικές για τα επικαλύπτοντα δέντρα, που επικαλύπτουν τον κυκλωματικό γράφο του δικτύου τροφοδοσίας 6, είναι φανερό πως για το επικαλύπτον δέντρο χαμηλής έκτασης, η μέση έκταση είναι χαμηλότερη από αυτή των άλλων δέντρων, ενώ το συνολικό βάρος επικάλυψης είναι μεγαλύτερο. Στην πράξη, για τους κυκλωματικούς γράφους των ολοκληρωμένων κυκλωμάτων, αυτό έχει αρνητικό αντίκτυπο στην επίδοση του προοιθμιστή κατάστασης.



ΣΧΗΜΑ 7.16: Μετρικές των επικ. δέντρων δικτύου τροφοδοσίας 6

Οι προοιθμιστές κατάστασης επικαλύπτοντος δέντρου ελαχίστου βάρους και υβριδικού επικαλύπτοντος δέντρου, παρουσιάζουν πολύ καλύτερη συμπεριφορά. Οι μετρικές μοιάζουν

αρκετά, καθώς και τα δύο δέντρα επικαλύπτουν σχεδόν το ίδιο ποσοστό βάρους του γράφου και επίσης, η μέση έκταση είναι στα ίδια επίπεδα.

| Δίκτυο τροφοδοσίας 6: Ανάλυση επικαλύπτοντων δέντρων | | | |
|--|-----------------------|------------------------------|-----------------|
| Μετρικές | Ελάχιστο επικ. δέντρο | Επικ. δέντρο χαμηλής έκτασης | Υβριδικό δέντρο |
| Ακμές | 50.664% | 50.664% | 50.6645% |
| Βάρος | 13.939% | 20.679% | 13.9447% |
| Μέση έκταση | 93.216% | 81.493% | 93.1984% |

ΠΙΝΑΚΑΣ 7.11: Μετρικές επικ. δέντρων στο δίκτυο τροφοδοσίας 2

Εντούτοις, στον πίνακα, παρατηρούμε ότι το υβριδικό επικαλύπτων δέντρο επικαλύπτει λιγότερο βάρος από το επικαλύπτων δέντρο ελαχίστου βάρους, και έχει και μικρότερη μέση έκταση. Το γεγονός αυτό, οδηγεί φανερά, σε καλύτερη επίδοση.

7.6.2 Επιδόση επαξημένων επικαλύπτοντων δέντρων

Από τα πειραματικά αποτελέσματα καθίσταται φανερό πως οι προρυθμιστές κατάστασης επαυξημένων δέντρων είναι πολύ αποδοτικοί.

Την χαμηλότερη επίδοση παρουσιάζει και ο προρυθμιστής κατάστασης επαυξημένου δέντρου χαμηλής έκτασης. Για το γεγονός αυτό όμως δεν ευθύνονται οι αλγόριθμοι επαύξησης, αλλά το χαμηλής ποιότητας δέντρο που δώθηκε ως είσοδος στους αλγόριθμους επαύξησης.

Και οι δύο αλγόριθμοι παρουσιάζουν πολύ καλή συμπεριφορά. Η αδυναμία του αλγορίθμου επαύξησης με βάση το βάρος των ακμών έγκυται στην χρήση του εξωτερικού εργαλείου *METIS*. Κατά την διάρκεια των πειραμάτων παρατηρήθηκαν περιπτώσεις όπου τμήματα που προέκυψαν από την κατάτμηση του *METIS* δεν ήταν ενδοσυνδεδεμένα. Το γεγονός αυτό δεν επηρεάζει την ορθότητα του αλγόριθμου, όμως είναι αρκετό για να τον χαρακτηρίσουμε μη-ντετερμινιστικό.

Επίσης, παρατηρούμε πως οι και οι δύο αλγόριθμοι επαύξησης δίνουν παρόμοια αποτελέσματα, ειδικά στις περιπτώσεις του επικαλύπτοντος δέντρου ελαχίστου βάρους και του υβριδικού επικαλύπτοντος δέντρου. Το γεγονός αυτό δεν μας εκπλήσει, καθώς οι γράφοι που επεξεργαζόμαστε είναι εξαιρετικά αραιοί. Οι αλγόριθμοι αυτοί στηρίζονται στην τεχνική κατάτμησης του γράφου και προσθήκη ακμών που γεφυρώνουν τα τμήματα που προκύπτουν. Επομένως, για εξαιρετικά αραιούς γράφους το εύρος των ακμών που γεφυρών τα ξεχωριστά τμήματα, και δεν ανήκουν ήδη στο επικαλύπτων δέντρο, που επιχειρούμε να επαξήσουμε, μειώνεται σε σημαντικό βαθμό.

7.6.3 Παρατηρήσεις και Προβληματισμοί

Τέλος, να σημειώσουμε ότι εφόσον οι προρυθμιστές κατάστασης υποστηρικτικού γράφου δημιουργούνται με βάση τον γράφο του αρχικού πίνακα, είναι σημαντικό ο γράφος αυτός να είναι υψηλής ποιότητας. Υψηλής ποιότητας γράφοι θα μας οδηγήσουν σε υψηλής ποιότητας προρυθμιστές κατάστασης.

Για παράδειγμα, ο γενικού σκοπού, προρυθμιστής κατάστασης που προκύπτει από ατελή παραγοντοποίηση *Cholesky*, δημιουργείται από έναν αλγόριθμο που επεξεργάζεται έναν πίνακα. Σε αντιδιαστολή, οι προρυθμιστές κατάστασης υποστηρικτικού γράφου δημιουργούνται από αλγορίθμους που επεξεργάζονται έναν γράφο, ο οποίος όπως είδαμε νωρίτερα, είναι ισόμορφος με τον αντίστοιχο Λαπλασιανό πίνακα.

Παρατηρούμε λοιπόν, ότι η μαθηματική σχέση που σχετίζει έναν γράφο με τον αντίστοιχο Λαπλασιανό πίνακα είναι ο ισομορφισμός και όχι η ταύτιση. Αυτό συνεπάγεται, ότι υπάρχει περίπτωση να χαθεί πληροφορία στους αλγορίθμους που επεξεργάζονται έναν πίνακα μέσω ενός γράφου, σε σχέση με του αλγορίθμους που επεξεργάζονται απ' ευθείας πίνακες (όπως η ατελής παραγοντοποίηση *Cholesky*).

Είδαμε ότι σε εξαιρετικά αραιούς γράφους, η αποδοτικότητα των προρυθμιστών κατάστασης μειώνεται. Αυτό είναι μια άμεση απόρροια της χαμηλής ποιότητας γράφου.

Κεφάλαιο 8

Μελλοντικές Επεκτάσεις

Οι προρυθμιστές κατάστασης υποστηρικτικού γράφου αποδυναμώνονται αποδοτικοί στην πράξη. Είναι ενδιαφέρον να συνεχίσουμε την έρευνα μας πάνω στην κατασκευή αποδοτικών επικαλύπτοντων δέντρων και επαυξημένων επικαλύπτοντων δέντρων, αξιοποιώντας όλες τις πληροφορίες από τα αποτελέσματα της πειραματικής διαδικασίας.

Η πρώτη δοκιμή για ένα υβριδικό δέντρο όπου συνυπολογίζει το βάρος και την έκταση των ακμών είναι ελπιδοφόρα, καθώς δίνει τους αποδοτικότερους προρυθμιστές κατάστασης στα πειράματά μας. Χρειάζεται επιπλέον έρευνα για την δημιουργία και υλοποίηση ενός πιο ολοκληρωμένου αλγορίθμου.

Επίσης, μπορούμε να ερευνήσουμε πως μπορούμε να επιτύχουμε αποδοτικότερους αλγόριθμους επάυξης δέντρων. Για παράδειγμα, μια καλή ιδέα είναι να προσαρμόσουμε τον αλγόριθμο των *Spielman* και *Teng* για την επαύξηση δέντρων, ώστε να λαμβάνει υπόψη του και άλλες μετρικές (π.χ το βάρος των ακμών) ώστε να επιτύγχουμε ακόμα πιο ποιοτικές καταταμήσεις γράφου.

Έπειτα μπορούμε να εισάγουμε πιο αποδοτικά κριτήρια στην επιλογή των επιπλέον ακμών τόσο ως προς τις μετρικές (π.χ βάρος, έκταση) όσο και ως προς τα τμήματα τα οποία καλούνται να γεφυρώσουν. Ενδεχομένως κάποια τμήματα να πρέπει να γεφυρωθούν με περισσότερες από μία ακμές.

Αξίζει επίσης να μελετηθεί αναλυτικά, ο αναδρομικός επιλυτής. Μέσω της ανάλυσης θα προκύψουν τα τμήματα κώδικα τα οποία χρειάζονται βελτιστοποίησης, ώστε οι πράξεις πινάκων και διανυσμάτων να εκτελούνται με τον πιο αποδοτικό τρόπο κατά την αναδρομική εκτέλεση.

Επεκτείνοντας την ιδέα της βελτιστοποίησης, μπορούμε να εφαρμόσουμε τεχνικές παραλληλοποίησης εφένός σε αλγοριθμικό και αφέτερου σε προγραμματιστικό επίπεδο, έτσι ώστε να εξάγουμε παραλληλοποιήσιμους αλγορίθμους, κατάλληλους για πολυεπεξεργαστικά περιβάλλοντα.

Βιβλιογραφία

1. Farid N. Najm. "Circuit simulation". Wiley, 2010.
2. Timothy A. Davis. "Direct methods for sparse linear systems". SIAM, 2006.
3. Richard Barrett, Michael Berry, Tony F. Chan, James Demmel, June M. Donato, Jack Dongarra, Victor Eijkhout, Roldan Pozo, Charles Romine, and Henk Van der Vorst. "Templates for the solution of linear systems". SIAM, 1993.
4. Pravin M. Vaidya. "Solving linear equations with symmetric diagonally dominant matrices by constructing good preconditioners", unpublished manuscript UIUC 1990. A talk based on the manuscript was presented at the IMA Workshop on Graph Theory and Sparse Matrix Computation. October 1991, Minneapolis.
5. Daniel A. Spielman, and Shang-Hua Teng. "Nearly-Linear time algorithms for preconditioning and solving symmetric, diagonally dominant linear systems". arXiv:cs/0607105v5 [cs.NA], 2012.
6. Michael Elkin, Yuval Emek, Daniel A. Spielman, and Shang-Hua Teng. "Lower-Stretch Spanning Trees". SIAM Journal on Computing, 38(2):608-628, 2008.
7. Noga Alon, Richard M. Karp, David Peleg, and Douglas West, "A graph-theoretic game and its application to the k-server problem". SIAM Journal on Computing, 24(1):78-100, 1995.
8. William N. Anderson and Thomas D. Morley. "Eigenvalues of the laplacian of a graph". Linear and Multilinear Algebra, 18(2):141-145, 1985.
9. Ittai Abraham and Ofer Neiman. "Using petal-decompositions to build a low stretch spanning tree". In Proceedings of the 44th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing (STOC '12), pages 395-406, 2012.
10. O. Axelsson. "A survey of preconditioned iterative methods for linear systems of algebraic equations". BIT Numerical Mathematics, 25(1):165-187, March 1985.
11. Erik G. Boman and Bruce Hendrickson. "Support theory for preconditioning. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications", 25(3):694-717, 2003.

-
12. Doron Chen and Sivan Toledo. "Vaidya's preconditioners: implementation and experimental study". *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, 16:30–49, 2003.
 13. Keith Gremban. "Combinatorial preconditioners for sparse, symmetric, diagonally dominant linear systems". PhD thesis, Carnegie Mellon University, CMU-CS-96-123, 1996.
 14. I. Koutis, G.L. Miller, and R. Peng. Approaching optimality for solving sdd linear systems. In *Foundations of Computer Science (FOCS)*, 2010 51st Annual IEEE Symposium on, pages 235–244, 2010.
 15. Daniel A. Spielman and Shang-Hua Teng. "Nearly-linear time algorithms for graph partitioning, graph sparsification, and solving linear systems". In *Proceedings of the thirty-sixth annual ACM Symposium on Theory of Computing*, pages 81–90, 2004.
 16. Daniel A. Spielman and Shang-Hua Teng. "Spectral sparsification of graphs". *SIAM Journal on Computing*, 40(4):981–1025, 2011.
 17. Gilbert Strang. "Introduction to applied mathematics". Wellesley-Cambridge Press, 1986.
 18. Daniel A. Spielman and Jaeoh Woo. "A note on preconditioning by low-stretch spanning trees". *CoRR*, abs/0903.2816, 2009.